Doteky

3. podzimní série — Termín odeslání: 4. prosince 2023

Úloha 1. (3 body)

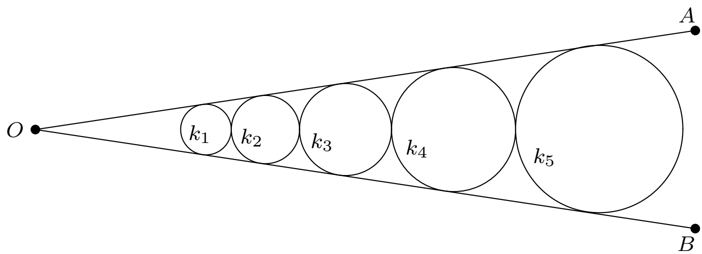
Mějme dvě kružnice o poloměrech 5 a 17. Vzdálenost jejich středů je 20. Uvažme přímku, která je jejich společnou tečnou a dotýká se jedné kružnice v bodě A a druhé v bodě B. Jaká je délka úsečky AB?

Úloha 2. (3 body)

Daník by rád do roviny nakreslil nějaký konečný počet růžových kružnic tak, aby každá z nich měla vnější dotyk s právě čtyřmi dalšími růžovými kružnicemi. Rozhodněte, zda se mu to může povést.

Úloha 3. (3 body)

Mezi rameny úhlu AOB leží pět kružnic k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 tak, že se každá z nich dotýká obou polopřímek OA, OB, a navíc má k_i vnější dotyk s k_{i+1} pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Víte-li, že poloměr k_1 je 8 a poloměr k_5 je 18, určete poloměr k_3.



Úloha 4. (5 bodů)

Je dán trojúhelník ABC, pro který platí $|AC| > |AB|$. Tečny k jeho kružnici opsané v bodech A a B se protínají v bodě T. Osa strany BC protíná stranu AC v bodě S. Dokažte, že přímka ST je rovnoběžná s BC.

Úloha 5. (5 bodů)

Je dán rovnoběžník $ABCD$. Výšky trojúhelníku ABD se protínají v bodě H a kružnice k se středem v H prochází bodem C. Dokažte, že se k dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABH.

Úloha 6. (5 bodů)

Kružnice ω_1 a ω_2 se protínají v bodech A a B. Tečny v bodě A k ω_1 a ω_2 postupně označíme ℓ_1 a ℓ_2. Kolmice z B na ℓ_1, ℓ_2 postupně protínají ω_2, ω_1 v bodech X a Y různých od B. Dokažte, že X, Y a A leží na jedné přímce.

Úloha 7. (5 bodů)

V kosočtverci $ABCD$ se kružnice vepsaná Ω dotýká stran AB, BC, CD, DA po řadě v bodech E, F, G, H. Dále nechť je ω_1 kružnice, jež se dotýká Ω v bodě T_1 a stran AD, AB po řadě v P_1, Q_1. Obdobně nechť je ω_2 kružnice dotýkající se Ω v T_2 a stran BC, BA po řadě v P_2, Q_2. Dokažte, že přímky P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH vytínají v rovině čtverec.

Úloha 8. (5 bodů)

Na kružnici k leží bod A a uvnitř ní bod M. Zvolme přímku ℓ procházející bodem M a označme průsečíky ℓ s k jako B, C. Dokažte, že se kružnice procházející středy stran trojúhelníku ABC (tzv. *Feuerbachova kružnice*) dotýká pevné kružnice, která nezávisí na konkrétní volbě přímky ℓ.

Doteky

3. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Mějme dvě kružnice o poloměrech 5 a 17. Vzdálenost jejich středů je 20. Uvažme přímku, která je jejich společnou tečnou a dotýká se jedné kružnice v bodě A a druhé v bodě B. Jaká je délka úsečky AB? *(Lenka Kopfová)*

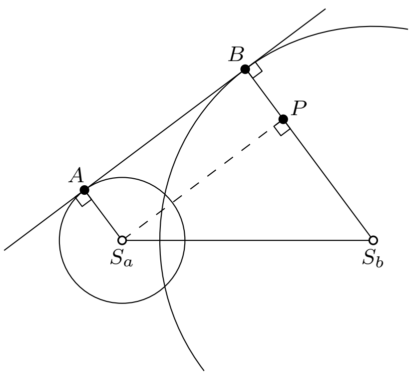
ŘEŠENÍ:

Střed menší, respektive větší kružnice označíme S_a, respektive S_b a jejich body dotyku se společnou tečnou A, respektive B. Platí tak, že $|S_aA| = 5$ a $|S_bB| = 17$. Bodem S_a vedeme rovnoběžku s přímkou AB, její průsečík s úsečkou BS_b označíme P. Jelikož je AB tečna obou kružnic, platí, že AB je kolmé na S_bB i na S_aA.

Dostáváme tak obdélník S_aPBA, pro délky jeho stran platí $|S_aP| = |AB|$ a $|PB| = |S_aA| = 5$. Dále dostáváme pravoúhlý trojúhelník S_aS_bP s pravým úhlem při vrcholu P, pro délky jeho stran platí $|S_aS_b| = 20$ (vzdálenost středů ze zadání) a $|S_bP| = |S_bB| - |PB| = 17 - 5 = 12$. Délku třetí strany, která je odvěsnou, pak z Pythagorovy věty vypočítáme jako

$$|S_aP| = \sqrt{|S_aS_b|^2 - |S_bP|^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16.$$

Jelikož $|S_aP| = |AB|$, dostáváme tak, že hledaná vzdálenost bodů A a B je 16.



POZNÁMKY:

Velká část řešení postupovala obdobně jako to vzorové. Někteří řešitelé pak označili průsečík přímek AB a S_aS_b jako C a využili podobnosti trojúhelníků ACS_a a BCS_b. V některých řešeních jsem strhávala body za chybějící postup, nezapomeňte vždy alespoň stručně popsat, jak jste při řešení postupovali! *(Klárka Grinerová)*

Úloha 2.

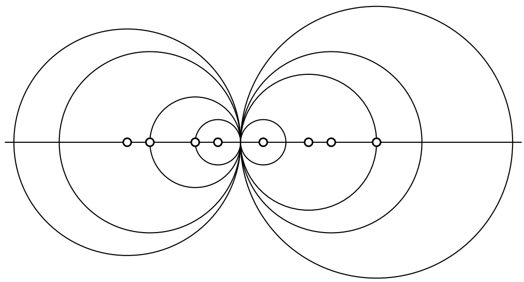
Daník by rád do roviny nakreslil nějaký konečný počet růžových kružnic tak, aby každá z nich měla vnější dotyk s právě čtyřmi dalšími růžovými kružnicemi. Rozhodněte, zda se mu to může povést.

(Josef Minařík)

Řešení:

Daníkovi se to povést může, například takto:

Pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ vytvoří Daník v kartézské soustavě souřadnic kružnici se středem v bodě $[s_i, 0]$ a poloměrem $|s_i|$. Jednotlivá s_i si může zvolit libovolně tak, aby první čtyři s_i byla kladná, poslední čtyři záporná a všechna s_i byla po dvou různá.



Každá kružnice pak má vnější dotyk se všemi čtyřmi kružnicemi na druhé straně od počátku, protože vzdálenost jejich středů se rovná součtu jejich poloměrů. Naopak s těmi na svojí straně vnější dotyk mít nemůže, protože jejich středy jsou vzdáleny méně než součet jejich poloměrů.

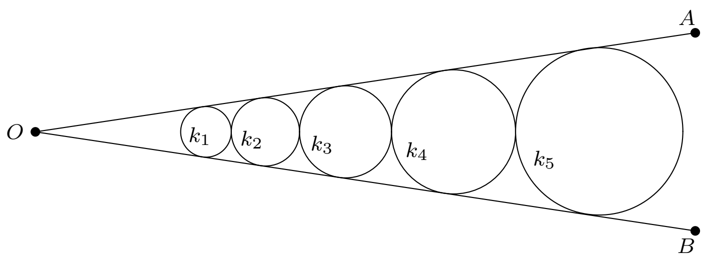
Poznámky:

Většina řešení si vysloužila tři body. Konstrukcí byla spousta, většina si umisťovala středy kružnic do nějakých symetrických tvarů. Mnohá řešení obšírně popisovala správnost svých složitých konstrukcí, čemuž se dalo vyhnout použitím mírně trikové konstrukce řešení vzorového.

(Vít Hanika)

Úloha 3.

Mezi rameny úhlu AOB leží pět kružnic k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 tak, že se každá z nich dotýká obou polopřímek OA, OB, a navíc má k_i vnější dotyk s k_{i+1} pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Víte-li, že poloměr k_1 je 8 a poloměr k_5 je 18, určete poloměr k_3.



(Magdaléna Mišinová)

Řešení:
Označme si středy kružnic S_i, body dotyků s polopřímkou OA jako D_i a poloměry kružnic jako $r_i = |S_iD_i|$ pro $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Dokážeme, že r_i a r_{i+1} mají konstantní poměr. Trojúhelníky OS_iD_i jsou pravoúhlé s pravým úhlem u bodu dotyku D_i. Úhel $\sphericalangle S_iOD_i$ je pro všechna i stejný, označme jeho velikost α. Pro trojúhelníky OS_iD_i tudíž platí

$$|OS_i| = \frac{r_i}{\sin\alpha}.$$

Dále si můžeme všimnout, že platí

$$\begin{aligned} |OS_i| + r_i &= |OS_{i+1}| - r_{i+1}, \\ \frac{r_i}{\sin\alpha} + r_i &= \frac{r_{i+1}}{\sin\alpha} - r_{i+1}, \\ r_i(1+\sin\alpha) &= r_{i+1}(1-\sin\alpha), \\ r_i &= \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} r_{i+1}. \end{aligned}$$

Označíme-li $k = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, dostaneme $r_i = kr_{i+1}$, kde k je stejné pro všechna i. Platí tedy

$$r_1 = kr_2 = k \cdot kr_3 = \cdots = k^4 r_5.$$

Proto

$$k = \left(\frac{r_1}{r_5}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{8}{18}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ve skutečnosti má rovnice $r_1 = k^4 r_5$ dvě reálná řešení $k = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, nás ovšem zajímá pouze to kladné.

Nyní už jen jednoduchým dosazením dostaneme $r_3 = \frac{r_1}{k^2} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$. Analogicky bychom mohli získat i r_2 a r_4.

Poznámky:
Úložka měla plno úspěšných řešitelů. Správná řešení se ubírala hlavně dvěma směry, a to přes koeficient jako ve vzorovém řešení a dokázáním vzorečku $r_i^2 = r_{i+1}r_{i-1}$, který byl získán z poměrů stran podobných trojúhelníků. *(Anna Marie Minarovičová)*

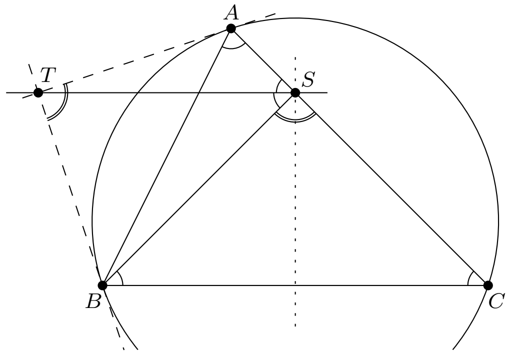
Úloha 4.

Je dán trojúhelník ABC, pro který platí $|AC| > |AB|$. Tečny k jeho kružnici opsané v bodech A a B se protínají v bodě T. Osa strany BC protíná stranu AC v bodě S. Dokažte, že přímka ST je rovnoběžná s BC. *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:
Nejprve si uvědomíme, že trojúhelník BCS je rovnoramenný, což vyplývá z toho, že bod S leží na ose strany BC. Označme $|\sphericalangle BCA| = \gamma$. Potom

$$|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle SBC| = \gamma, \qquad |\sphericalangle CSB| = 180^\circ - 2\gamma \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle BSA| = 2\gamma.$$

Z věty o úsekovém úhlu dostaneme, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle TBA|$. Dopočítáme velikost úhlu ATB, $|\sphericalangle ATB| = 180^\circ - 2\gamma$. Jelikož platí, že $|\sphericalangle ATB| + |\sphericalangle BSA| = 180^\circ$, je čtyřúhelník $ATBS$ tětivový. Z toho plyne $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle AST| = \gamma$ a $|\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle BST| = \gamma$. Protože platí $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle BST|$, jsou přímky ST a BC rovnoběžné.



Poznámky:
Většina řešitelů se vydala stejnou nebo podobnou cestou jako vzorové řešení. Jejich řešení se od sebe příliš nelišila postupem, rozdílná byla ale míra podrobnosti zdůvodňování jednotlivých kroků. Někteří řešitelé se vydali po odlišných, trochu strastiplných cestách. *(Terka Kučerová)*

Úloha 5.

Je dán rovnoběžník $ABCD$. Výšky trojúhelníku ABD se protínají v bodě H a kružnice k se středem v H prochází bodem C. Dokažte, že se k dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABH.

(Matouš Šafránek)

Řešení:
Definujme bod E jako průsečík přímky BC a rovnoběžky s BD procházející bodem A. Ukážeme, že zadané kružnice se dotýkají právě v bodě E.

Z definice bodu H víme, že $AH \perp BD$ a $BH \perp AD$. Z rovnoběžností $BD \parallel AE$ a $AD \parallel BE$ pak plyne i $AH \perp AE$ a $BH \perp BE$ neboli $|\sphericalangle HBE| = |\sphericalangle HAE| = 90°$. To znamená, že body A, B, H, E leží na jedné kružnici s průměrem HE.

Ze zadání je $ABCD$ rovnoběžník a díky zmíněným rovnoběžnostem rovněž víme, že i $ADBE$ je rovnoběžník. Z toho plyne, že $|BC| = |AD| = |BE|$, a tedy B je střed úsečky EC a HB je její osa. Z tohoto důvodu platí rovnost $|HC| = |HE|$ a bod E leží na kružnici k.

Odtud již plyne, že se kružnice k dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABH v bodě E, neboť obě kružnice tímto bodem prochází a oba jejich středy leží na přímce EH.

Poznámky:
Většina řešitelů si správně dokreslila bod E ze vzorového řešení a pak dokázala, že se jedná o bod dotyku. Málo řešení ale fungovalo pro všechny možné konfigurace zadaných bodů (např. pokud by byl úhel BAD tupý, tak úhlící rovnosti ve většině došlých řešení přestanou platit). Rozhodl jsem se za to bod nestrhávat, ale na soutěžích MO by to nejspíš na plný počet bodů nestačilo.

(Martin Raška)

Úloha 6.

Kružnice ω_1 a ω_2 se protínají v bodech A a B. Tečny v bodě A k ω_1 a ω_2 postupně označíme ℓ_1 a ℓ_2. Kolmice z B na ℓ_1, ℓ_2 postupně protínají ω_2, ω_1 v bodech X a Y různých od B. Dokažte, že X, Y a A leží na jedné přímce. *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:
Nechť středy každé kružnice leží vně té druhé.

Označme si paty kolmic z bodu B na ℓ_1 respektive ℓ_2 jako Q respektive P. Mějme bod C ležící na ℓ_1 na polopřímce opačné k AQ a bod D na ℓ_2 na polopřímce opačné k AP. Jelikož jsou ℓ_1 a ℓ_2 tečny ke kružnicím ω_1 a ω_2, můžeme využít větu o obvodovém a úsekovém úhlu. Z ní získáme, že $|\sphericalangle CAY|$ je roven úhlu nad tětivou AY v kružnici ω_1, tedy úhlu $|\sphericalangle ABY|$. Obdobně také platí

$$|\sphericalangle XAD| = |\sphericalangle XBA|. \tag{1}$$

Čtyřúhelník $APBQ$ je tětivový, neboť dva jeho protilehlé úhly jsou pravé. Pak ale platí

$$|\sphericalangle QAD| = 180^\circ - |\sphericalangle QAP| = 180^\circ - (180^\circ - |\sphericalangle QBP|) = |\sphericalangle QBP|. \tag{2}$$

Kde v druhé rovnosti využíváme tětivovost $APBQ$. Nyní si povšimněme, že

$$|\sphericalangle QAD| = |\sphericalangle QAX| + |\sphericalangle XAD| = |\sphericalangle QAX| + |\sphericalangle QBA|,$$

kde druhá rovnost plyne z (1), a

$$|\sphericalangle QAD| = |\sphericalangle QBP| = |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle QBA|,$$

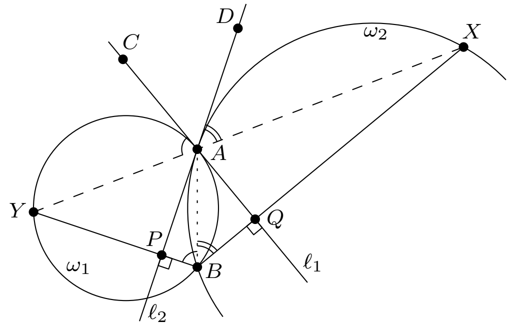
kde první rovnost plyne z (2).

Z výše zmíněného už jednoduše vidíme, že $|\sphericalangle QAX| = |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle CAY|$. Pak

$$|\sphericalangle YAX| = |\sphericalangle YAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle QAX| + |\sphericalangle PAQ| + |\sphericalangle DAX| = 180^\circ,$$

kde druhá rovnost platí z výše zmíněného a vrcholových úhlů, poslední z toho, že P, A a D leží v přímce.

Z toho už ale plyne, že X, A a Y leží v přímce, čímž je úloha vyřešena.



Pokud střed jedné kružnice leží uvnitř té druhé, budou ležet body X a Y na stejnou stranu od bodu A. Pak opět podobně jako výše pomocí úsekových a obvodových úhlů (a tentokrát pomocí obvodových úhlů v čtyřúhelníku $ABPQ$, který je stále tětivový) dokážeme, že úhly $|\sphericalangle YAP|$ a $|\sphericalangle XAP|$ se rovnají.

Poznámky:
Všechna řešení, která dorazila, se udávala jednou ze dvou cest. Buď tečny využila na obvodové a úsekové úhly jako v tom vzorovém nebo využila rovnoběžnosti spojnic bodu A se středy kružnic a kolmic na tečny, čímž získala rovnoběžník a spoustu shodných úhlů. Přes úhlící lapálie se pak různě dokazovala kolinearita bodů, nejčastěji však dopočtem úhlů u vrcholu A nebo důkazem, že čtyřúhelník $YBXA$ je trojúhelník. Všechna řešení došla úspěšně k cíli.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 7.

V kosočtverci $ABCD$ se kružnice vepsaná Ω dotýká stran AB, BC, CD, DA po řadě v bodech E, F, G, H. Dále nechť je ω_1 kružnice, jež se dotýká Ω v bodě T_1 a stran AD, AB po řadě v P_1, Q_1. Obdobně nechť je ω_2 kružnice dotýkající se Ω v T_2 a stran BC, BA po řadě v P_2, Q_2. Dokažte, že přímky P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH vytínají v rovině čtverec. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

V řešení bude $|M, KL|$ značit vzdálenost bodu M od přímky KL a kdykoliv jsou přímky KL a MN rovnoběžné, značme jejich vzdálenost jako $|KL, MN|$.

Z toho, že $ABCD$ je symetrický podle AC, jsou úsečky P_1Q_1, GF kolmé na AC. A dále z toho, že $ABCD$ je symetrický podle DB, jsou úsečky P_2Q_2, GH kolmé na BD. Z toho plyne, že P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH vytínají pravoúhelník. Nyní stačí ukázat, že vzdálenost protilehlých stran tohoto pravoúhelníku je shodná. Dokážeme, že tato vzdálenost je rovna průměru kružnice Ω, označíme si ji d.

Ze symetrie musí T_1 ležet na AC, druhý průsečík AC s Ω definujeme jako X. Potom si vzdálenost $|P_1Q_1, GF|$ můžeme vyjádřit jako

$$|P_1Q_1, GF| = d + |T_1, P_1Q_1| - |X, GF|.$$

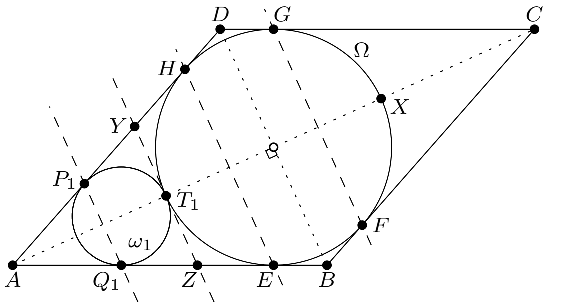
Z toho, že $ABCD$ je symetrický podle DB, bude $|X, GF| = |T_1, EH|$, tedy nám stačí ukázat, že $|T_1, EH| = |T_1, P_1Q_1|$.

Kolmice na AC v bodě T_1 je chordálou kružnic Ω a ω_1. To znamená, že každý bod na této přímce má stejnou mocnost k oběma kružnicím. Průsečík této kolmice s AD a AB postupně označíme Y a Z. Z mocnosti víme, že $|YP_1|^2 = |YH|^2$ a $|ZQ_1|^2 = |ZE|^2$, tedy Y a Z jsou středy úseček HP_1 a EQ_1.

Nyní víme, že P_1Q_1EH je lichoběžník a T_1 leží na jeho střední příčce. Z toho vychází, že $|T_1, EH| = |T_1, P_1Q_1|$ a tím pádem

$$|P_1Q_1, GF| = d + |T_1, P_1Q_1| - |X, GF| = d.$$

Obdobně můžeme ukázat, že přímky P_2Q_2 a GH jsou od sebe vzdálené také d.



Tím jsme ukázali, že pravoúhelník vyťatý přímkami P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH je čtverec.

Poznámky:

Všechna správná řešení používala podobný potup jako ve vzorovém řešení, tedy nejprve ukázala, že přímky P_1Q_1, GH, GF a P_2Q_2 vytínají obdélník a pak ukázali, že tento obdélník je čtverec. Pár lidem se stalo, že dokázali, že to je obdélník, ale už dál nedokázali, že to je čtverec.

(Petr Hladík)

Úloha 8.

Na kružnici k leží bod A a uvnitř ní bod M. Zvolme přímku ℓ procházející bodem M a označme průsečíky ℓ s k jako B, C. Dokažte, že se kružnice procházející středy stran trojúhelníku ABC (tzv. Feuerbachova kružnice) dotýká pevné kružnice, která nezávisí na konkrétní volbě přímky ℓ.

(Káťa Danilina)

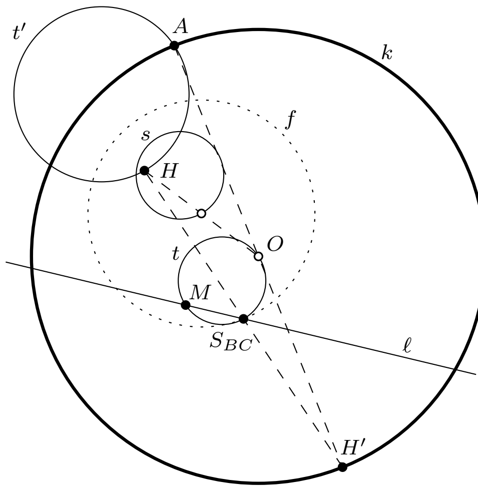
Řešení:

Jelikož je poloměr Feuerbachovy kružnice konstantní (o tom více později), zaměříme se na množinu možných středů této kružnice a s využitím stejnolehlosti ukážeme, že tato množina je kružnice.

Kružnice k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Její střed označíme O. Střed BC označíme S_{BC}. Protože střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran trojúhelníku, platí $\ell \perp OS_{BC}$. Body O a M jsou fixní pro všechny trojúhelníky ABC. Z toho plyne, že bod S_{BC} leží na Thaletově kružnici nad průměrem OM, kterou označíme t.

Označíme průsečík výšek trojúhelníku ABC jako H. Je známé, že se H ve středové souměrnosti podle bodu S_{BC} zobrazí na kružnici opsanou do bodu $H\prime$ takového, že $AH\prime$ je průměrem kružnice k (tedy $O \in AH\prime$). Všechny možné body S_{BC} leží na kružnici t a bod $H\prime$ nezávisí na volbě přímky l ($H\prime$ leží na průsečíku k a přímky OA). Z toho plyne, že všechny možné body H leží na kružnici $t\prime$, která je stejnolehlým obrazem kružnice t podle středu $H\prime$ s koeficientem 2 (plyne ze středové souměrnosti H a $H\prime$ podle středu S_{BC}).

Střed Feuerbachovy kružnice, kterou označíme f, leží ve středu úsečky OH a její poloměr je roven jedné polovině poloměru kružnice opsané.[1] Pokud tak uděláme stejnolehlé zobrazení $t\prime$ podle bodu O s koeficientem $\frac{1}{2}$, dostaneme kružnici s s poloměrem r_s a středem S, na které leží všechny možné středy f. Jelikož průměr f nezávisí na volbě l a je roven $\frac{|AO|}{2}$ a možné středy f leží na kružnici s, bude se každá f dotýkat kružnice se středem v S a poloměrem $r_s + \frac{|AO|}{2}$, což je pevná kružnice, která nezávisí na volbě l.



Poznámky:

Řešení sice nedorazilo mnoho, ale většina z nich se podobným způsobem dobrala ke správnému výsledku. Některá řešení využila také vlastností Eulerovy přímky. Nejedno řešení se pak vydalo na strastiplnou cestu řešení přes analytickou geometrii. *(Klárka Grinerová)*

[1] Proč to platí a mnohé další se můžeš dovědět třeba zde: *https://prase.cz/archive/36/uvod1s.pdf*.