

# Doteky

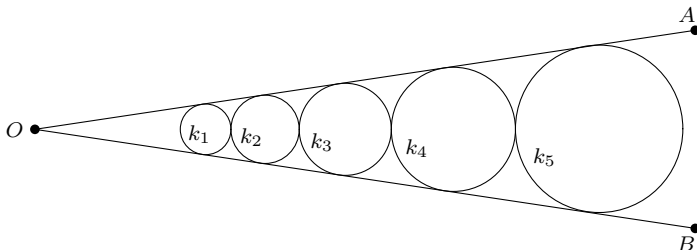
3. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. PROSINCE 2023

ÚLOHA 1. (3 BODY)  
Mějme dvě kružnice o poloměrech 5 a 17. Vzdálenost jejich středů je 20. Uvažme přímku, která je jejich společnou tečnou a dotýká se jedné kružnice v bodě  $A$  a druhé v bodě  $B$ . Jaká je délka úsečky  $AB$ ?

ÚLOHA 2. (3 BODY)  
Daník by rád do roviny nakreslil **nějaký konečný počet** růžových kružnic tak, aby každá z nich měla vnější dotyk s právě čtyřmi dalšími růžovými kružnicemi. Rozhodněte, zda se mu to může povést.

ÚLOHA 3. (3 BODY)  
Mezi rameny úhlu  $AOB$  leží pět kružnic  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  tak, že se každá z nich dotýká obou polopřímek  $OA, OB$ , a navíc má  $k_i$  vnější dotyk s  $k_{i+1}$  pro každé  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Víte-li, že poloměr  $k_1$  je 8 a poloměr  $k_5$  je 18, určete poloměr  $k_3$ .



ÚLOHA 4. (5 BODŮ)  
Je dán trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $|AC| > |AB|$ . Tečny k jeho kružnici opsané v bodech  $A$  a  $B$  se protínají v bodě  $T$ . Osa strany  $BC$  protíná stranu  $AC$  v bodě  $S$ . Dokažte, že přímka  $ST$  je rovnoběžná s  $BC$ .

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)  
Je dán rovnoběžník  $ABCD$ . Výšky trojúhelníku  $ABD$  se protínají v bodě  $H$  a kružnice  $k$  se středem v  $H$  prochází bodem  $C$ . Dokažte, že se  $k$  dotýká kružnice opsané trojúhelníku  $ABH$ .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)  
Kružnice  $\omega_1$  a  $\omega_2$  se protínají v bodech  $A$  a  $B$ . Tečny v bodě  $A$  k  $\omega_1$  a  $\omega_2$  postupně označíme  $\ell_1$  a  $\ell_2$ . Kolmice z  $B$  na  $\ell_1, \ell_2$  postupně protínají  $\omega_2, \omega_1$  v bodech  $X$  a  $Y$  různých od  $B$ . Dokažte, že  $X, Y$  a  $A$  leží na jedné přímce.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)  
V kosočtverci  $ABCD$  se kružnice vepsaná  $\Omega$  dotýká stran  $AB, BC, CD, DA$  po řadě v bodech  $E, F, G, H$ . Dále necht' je  $\omega_1$  kružnice, jež se dotýká  $\Omega$  v bodě  $T_1$  a stran  $AD, AB$  po řadě v  $P_1, Q_1$ . Obdobně necht' je  $\omega_2$  kružnice dotýkající se  $\Omega$  v  $T_2$  a stran  $BC, BA$  po řadě v  $P_2, Q_2$ . Dokažte, že přímky  $P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH$  vytínají v rovině čtverec.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Na kružnici  $k$  leží bod  $A$  a uvnitř ní bod  $M$ . Zvolme přímku  $\ell$  procházející bodem  $M$  a označme průsečíky  $\ell$  s  $k$  jako  $B, C$ . Dokažte, že se kružnice procházející středy stran trojúhelníku  $ABC$  (tzv. *Feuerbachova kružnice*) dotýká pevné kružnice, která nezávisí na konkrétní volbě přímky  $\ell$ .

# Doteky

3. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

Mějme dvě kružnice o poloměrech 5 a 17. Vzdálenost jejich středů je 20. Uvažme přímku, která je jejich společnou tečnou a dotýká se jedné kružnice v bodě  $A$  a druhé v bodě  $B$ . Jaká je délka úsečky  $AB$ ?  
(Lenka Kopfová)

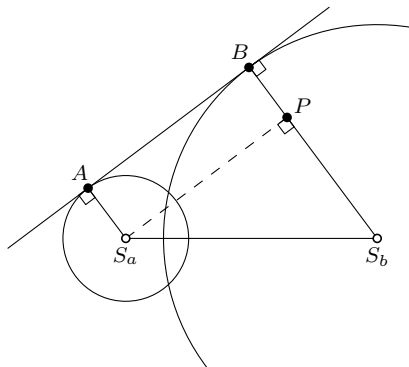
ŘEŠENÍ:

Střed menší, respektive větší kružnice označíme  $S_a$ , respektive  $S_b$  a jejich body dotyku se společnou tečnou  $A$ , respektive  $B$ . Platí tak, že  $|S_aA| = 5$  a  $|S_bB| = 17$ . Bodem  $S_a$  vedeme rovnoběžku s přímkou  $AB$ , její průsečík s úsečkou  $BS_b$  označíme  $P$ . Jelikož je  $AB$  tečna obou kružnic, platí, že  $AB$  je kolmé na  $S_bB$  i na  $S_aA$ .

Dostáváme tak obdélník  $S_aPBA$ , pro délky jeho stran platí  $|S_aP| = |AB|$  a  $|PB| = |S_aA| = 5$ . Dále dostáváme pravoúhlý trojúhelník  $S_aS_bP$  s pravým úhlem při vrcholu  $P$ , pro délky jeho stran platí  $|S_aS_b| = 20$  (vzdálenost středů ze zadání) a  $|S_bP| = |S_bB| - |PB| = 17 - 5 = 12$ . Délku třetí strany, která je odvěsnou, pak z Pythagorovy věty vypočítáme jako

$$|S_aP| = \sqrt{|S_aS_b|^2 - |S_bP|^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16.$$

Jelikož  $|S_aP| = |AB|$ , dostáváme tak, že hledaná vzdálenost bodů  $A$  a  $B$  je 16.



POZNÁMKY:

Velká část řešení postupovala obdobně jako to vzorové. Někteří řešitelé pak označili průsečík přímek  $AB$  a  $S_aS_b$  jako  $C$  a využili podobnosti trojúhelníků  $ACS_a$  a  $BCS_b$ . V některých řešeních jsem strhávala body za chybějící postup, nepaměňte vždy alespoň stručně popsat, jak jste při řešení postupovali!  
(Klárka Grinerová)

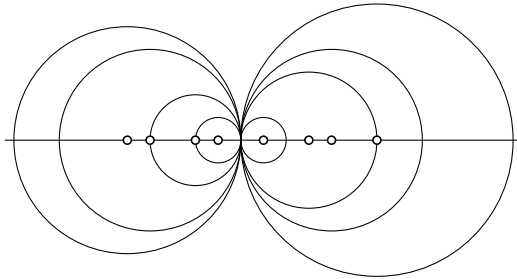
## Úloha 2.

Daník by rád do roviny nakreslil nějaký konečný počet růžových kružnic tak, aby každá z nich měla vnější dotyk s právě čtyřmi dalšími růžovými kružnicemi. Rozhodněte, zda se mu to může povést. (Josef Minařík)

ŘEŠENÍ:

Daníkovi se to povést může, například takto:

Pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$  vytvoří Daník v kartézské soustavě souřadnic kružnici se středem v bodě  $[s_i, 0]$  a poloměrem  $|s_i|$ . Jednotlivá  $s_i$  si může zvolit libovolně tak, aby první čtyři  $s_i$  byla kladná, poslední čtyři záporná a všechna  $s_i$  byla po dvou různá.



Každá kružnice pak má vnější dotyk se všemi čtyřmi kružnicemi na druhé straně od počátku, protože vzdálenost jejich středů se rovná součtu jejich poloměrů. Naopak s těmi na svojí straně vnější dotyk mít nemůže, protože jejich středy jsou vzdáleny méně než součet jejich poloměrů.

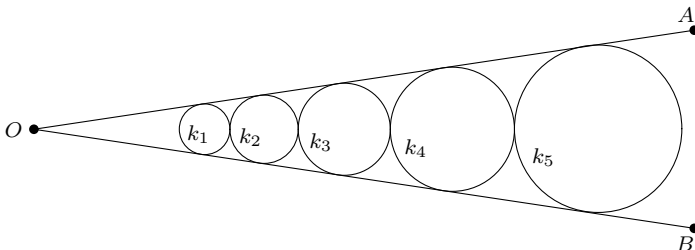
POZNÁMKY:

Většina řešení si vysloužila tři body. Konstrukcí byla spousta, většina si umísťovala středy kružnic do nějakých symetrických tvarů. Mnohá řešení obšírně popisovala správnost svých složitých konstrukcí, čemuž se dalo vyhnout použitím mírně trikové konstrukce řešení vzorového.

(Vít Hanika)

## Úloha 3.

Mezi rameny úhlu  $AOB$  leží pět kružnic  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  tak, že se každá z nich dotýká obou polopřímek  $OA, OB$ , a navíc má  $k_i$  vnější dotyk s  $k_{i+1}$  pro každé  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Víte-li, že poloměr  $k_1$  je 8 a poloměr  $k_5$  je 18, určete poloměr  $k_3$ .



(Magdaléna Mišinová)

ŘEŠENÍ:

Označme si středy kružnic  $S_i$ , body dotyků s polopřímku  $OA$  jako  $D_i$  a poloměry kružnic jako  $r_i = |S_i D_i|$  pro  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Dokážeme, že  $r_i$  a  $r_{i+1}$  mají konstantní poměr. Trojúhelníky  $OS_i D_i$  jsou pravoúhlé s pravým úhlem u bodu dotyku  $D_i$ . Úhel  $\sphericalangle S_i O D_i$  je pro všechna  $i$  stejný, označme jeho velikost  $\alpha$ . Pro trojúhelníky  $OS_i D_i$  tudíž platí

$$|OS_i| = \frac{r_i}{\sin \alpha}.$$

Dále si můžeme všimnout, že platí

$$\begin{aligned} |OS_i| + r_i &= |OS_{i+1}| - r_{i+1}, \\ \frac{r_i}{\sin \alpha} + r_i &= \frac{r_{i+1}}{\sin \alpha} - r_{i+1}, \\ r_i(1 + \sin \alpha) &= r_{i+1}(1 - \sin \alpha), \\ r_i &= \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} r_{i+1}. \end{aligned}$$

Označíme-li  $k = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ , dostaneme  $r_i = k r_{i+1}$ , kde  $k$  je stejné pro všechna  $i$ . Platí tedy

$$r_1 = k r_2 = k \cdot k r_3 = \dots = k^4 r_5.$$

Proto

$$k = \left(\frac{r_1}{r_5}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{8}{18}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ve skutečnosti má rovnice  $r_1 = k^4 r_5$  dvě reálná řešení  $k = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ , nás ovšem zajímá pouze to kladné.

Nyní už jen jednoduchým dosazením dostaneme  $r_3 = \frac{r_1}{k^2} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$ . Analogicky bychom mohli získat  $r_2$  a  $r_4$ .

POZNÁMKY:

Úložka měla plno úspěšných řešitelů. Správná řešení se ubírala hlavně dvěma směry, a to přes koeficient jako ve vzorovém řešení a dokázáním vzorečku  $r_i^2 = r_{i+1} r_{i-1}$ , který byl získán z poměrů stran podobných trojúhelníků. (Anna Marie Minarovičová)

## Úloha 4.

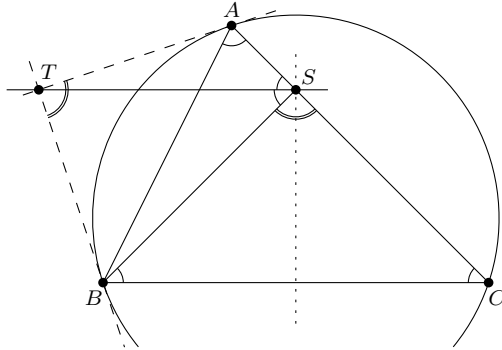
Je dán trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $|AC| > |AB|$ . Tečny k jeho kružnici opsané v bodech  $A$  a  $B$  se protínají v bodě  $T$ . Osa strany  $BC$  protíná stranu  $AC$  v bodě  $S$ . Dokažte, že přímka  $ST$  je rovnoběžná s  $BC$ . (Magdaléna Mišínová)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si uvědomíme, že trojúhelník  $BCS$  je rovnoramenný, což vyplývá z toho, že bod  $S$  leží na ose strany  $BC$ . Označme  $|\sphericalangle BCA| = \gamma$ . Potom

$$|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle SBC| = \gamma, \quad |\sphericalangle CSB| = 180^\circ - 2\gamma \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BSA| = 2\gamma.$$

Z věty o úsekovém úhlu dostaneme, že  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle TBA|$ . Dopočítáme velikost úhlu  $ATB$ ,  $|\sphericalangle ATB| = 180^\circ - 2\gamma$ . Jelikož platí, že  $|\sphericalangle ATB| + |\sphericalangle BSA| = 180^\circ$ , je čtyřúhelník  $ATBS$  tětíkový. Z toho plyne  $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle AST| = \gamma$  a  $|\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle BST| = \gamma$ . Protože platí  $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle BST|$ , jsou přímky  $ST$  a  $BC$  rovnoběžné.



#### POZNÁMKY:

Většina řešitelů se vydala stejnou nebo podobnou cestou jako vzorové řešení. Jejich řešení se od sebe příliš nelišila postupem, rozdílná byla ale míra podrobnosti zdůvodňování jednotlivých kroků. Někteří řešitelé se vydali po odlišných, trochu strastiplných cestách. (Terka Kučerová)

### Úloha 5.

Je dán rovnoběžník  $ABCD$ . Výšky trojúhelníku  $ABD$  se protínají v bodě  $H$  a kružnice  $k$  se středem v  $H$  prochází bodem  $C$ . Dokažte, že se  $k$  dotýká kružnice opsané trojúhelníku  $ABH$ .

(Matouš Šafránek)

#### ŘEŠENÍ:

Definujme bod  $E$  jako průsečík přímky  $BC$  a rovnoběžky s  $BD$  procházející bodem  $A$ . Ukážeme, že zadané kružnice se dotýkají právě v bodě  $E$ .

Z definice bodu  $H$  víme, že  $AH \perp BD$  a  $BH \perp AD$ . Z rovnoběžnosti  $BD \parallel AE$  a  $AD \parallel BE$  pak plyne i  $AH \perp AE$  a  $BH \perp BE$  neboli  $|\angle HBE| = |\angle HAE| = 90^\circ$ . To znamená, že body  $A, B, H, E$  leží na jedné kružnici s průměrem  $HE$ .

Ze zadání je  $ABCD$  rovnoběžník a díky zmíněným rovnoběžnostem rovněž víme, že i  $ADBE$  je rovnoběžník. Z toho plyne, že  $|BC| = |AD| = |BE|$ , a tedy  $B$  je střed úsečky  $EC$  a  $HB$  je její osa. Z tohoto důvodu platí rovnost  $|HC| = |HE|$  a bod  $E$  leží na kružnici  $k$ .

Odtud již plyne, že se kružnice  $k$  dotýká kružnice opsané trojúhelníku  $ABH$  v bodě  $E$ , neboť obě kružnice tímto bodem prochází a oba jejich středy leží na přímkce  $EH$ .

#### POZNÁMKY:

Většina řešitelů si správně dokreslila bod  $E$  ze vzorového řešení a pak dokázala, že se jedná o bod dotyku. Málo řešení ale fungovalo pro všechny možné konfigurace zadaných bodů (např. pokud by byl úhel  $BAD$  tupý, tak úhlíci rovnosti ve většině došlých řešení přestanou platit). Rozhodl jsem se za to bod nestrhávat, ale na soutěžích MO by to nejspíš na plný počet bodů nestačilo.

(Martin Raška)

### Úloha 6.

Kružnice  $\omega_1$  a  $\omega_2$  se protínají v bodech  $A$  a  $B$ . Tečny v bodě  $A$  k  $\omega_1$  a  $\omega_2$  postupně označíme  $\ell_1$  a  $\ell_2$ . Kolmice z  $B$  na  $\ell_1, \ell_2$  postupně protínají  $\omega_2, \omega_1$  v bodech  $X$  a  $Y$  různých od  $B$ . Dokažte, že  $X, Y$  a  $A$  leží na jedné přímkce.

(Magdaléna Mišínová)

ŘEŠENÍ:

Nechť středy každé kružnice leží vně té druhé.

Označme si paty kolmic z bodu  $B$  na  $\ell_1$  respektive  $\ell_2$  jako  $Q$  respektive  $P$ . Mějme bod  $C$  ležící na  $\ell_1$  na polopřímce opačné k  $AQ$  a bod  $D$  na  $\ell_2$  na polopřímce opačné k  $AP$ . Jelikož jsou  $\ell_1$  a  $\ell_2$  tečny ke kružnicím  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , můžeme využít větu o obvodovém a úsekovém úhlu. Z ní získáme, že  $|\sphericalangle CA Y|$  je roven úhlu nad tětivou  $A Y$  v kružnici  $\omega_1$ , tedy úhlu  $|\sphericalangle A B Y|$ . Obdobně také platí

$$|\sphericalangle X A D| = |\sphericalangle X B A|. \quad (1)$$

Čtyřúhelník  $APBQ$  je tětívový, neboť dva jeho protilehlé úhly jsou pravé. Pak ale platí

$$|\sphericalangle Q A D| = 180^\circ - |\sphericalangle Q A P| = 180^\circ - (180^\circ - |\sphericalangle Q B P|) = |\sphericalangle Q B P|. \quad (2)$$

Kde v druhé rovnosti využíváme tětívovost  $APBQ$ . Nyní si povšimněme, že

$$|\sphericalangle Q A D| = |\sphericalangle Q A X| + |\sphericalangle X A D| = |\sphericalangle Q A X| + |\sphericalangle Q B A|,$$

kde druhá rovnost plyne z (1), a

$$|\sphericalangle Q A D| = |\sphericalangle Q B P| = |\sphericalangle A B P| + |\sphericalangle Q B A|,$$

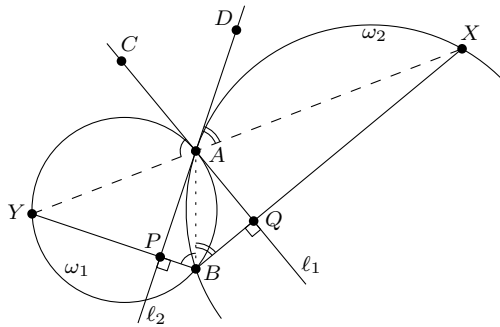
kde první rovnost plyne z (2).

Z výše zmíněného už jednoduše vidíme, že  $|\sphericalangle Q A X| = |\sphericalangle A B P| = |\sphericalangle C A Y|$ . Pak

$$|\sphericalangle Y A X| = |\sphericalangle Y A C| + |\sphericalangle C A D| + |\sphericalangle D A X| = |\sphericalangle Q A X| + |\sphericalangle P A Q| + |\sphericalangle D A X| = 180^\circ,$$

kde druhá rovnost platí z výše zmíněného a vrcholových úhlů, poslední z toho, že  $P$ ,  $A$  a  $D$  leží v přímce.

Z toho už ale plyne, že  $X$ ,  $A$  a  $Y$  leží v přímce, čímž je úloha vyřešena.



Pokud střed jedné kružnice leží uvnitř té druhé, budou ležet body  $X$  a  $Y$  na stejnou stranu od bodu  $A$ . Pak opět podobně jako výše pomocí úsekových a obvodových úhlů (a tentokrát pomocí obvodových úhlů v čtyřúhelníku  $ABPQ$ , který je stále tětívový) dokážeme, že úhly  $|\sphericalangle Y A P|$  a  $|\sphericalangle X A P|$  se rovnají.

POZNÁMKY:

Všechna řešení, která dorazila, se udávala jednou ze dvou cest. Buď tečny využila na obvodové a úsekové úhly jako v tom vzorovém nebo využila rovnoběžnosti spojnic bodu  $A$  se středy kružnic a kolmic na tečny, čímž získala rovnoběžník a spoustu shodných úhlů. Přes úhlicí lapálie se pak různé dokazovala kolinearita bodů, nejčastěji však dopočtem úhlů u vrcholu  $A$  nebo důkazem, že čtyřúhelník  $YBXA$  je trojúhelník. Všechna řešení došla úspěšně k cíli.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

## Úloha 7.

V kosočtverci  $ABCD$  se kružnice vepsaná  $\Omega$  dotýká stran  $AB, BC, CD, DA$  po řadě v bodech  $E, F, G, H$ . Dále nechť je  $\omega_1$  kružnice, jež se dotýká  $\Omega$  v bodě  $T_1$  a stran  $AD, AB$  po řadě v  $P_1, Q_1$ . Obdobně nechť je  $\omega_2$  kružnice dotýkající se  $\Omega$  v  $T_2$  a stran  $BC, BA$  po řadě v  $P_2, Q_2$ . Dokažte, že přímky  $P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH$  vytínají v rovině čtverec. (Matěj Doležálek)

ŘEŠENÍ:

V řešení bude  $|M, KL|$  značit vzdálenost bodu  $M$  od přímky  $KL$  a kdykoliv jsou přímky  $KL$  a  $MN$  rovnoběžné, značme jejich vzdálenost jako  $|KL, MN|$ .

Z toho, že  $ABCD$  je symetrický podle  $AC$ , jsou úsečky  $P_1Q_1, GF$  kolmé na  $AC$ . A dále z toho, že  $ABCD$  je symetrický podle  $DB$ , jsou úsečky  $P_2Q_2, GH$  kolmé na  $BD$ . Z toho plyne, že  $P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH$  vytínají pravoúhelník. Nyní stačí ukázat, že vzdálenost protilehlých stran tohoto pravoúhelníku je shodná. Dokažeme, že tato vzdálenost je rovna průměru kružnice  $\Omega$ , označme si ji  $d$ .

Ze symetrie musí  $T_1$  ležet na  $AC$ , druhý průsečík  $AC$  s  $\Omega$  definujeme jako  $X$ . Potom si vzdálenost  $|P_1Q_1, GF|$  můžeme vyjádřit jako

$$|P_1Q_1, GF| = d + |T_1, P_1Q_1| - |X, GF|.$$

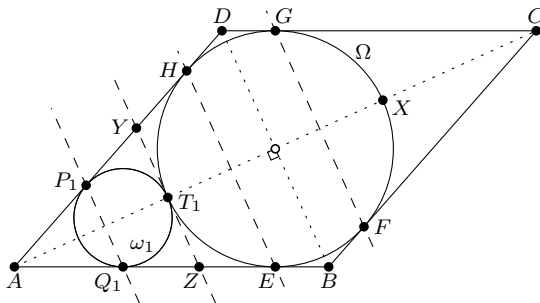
Z toho, že  $ABCD$  je symetrický podle  $DB$ , bude  $|X, GF| = |T_1, EH|$ , tedy nám stačí ukázat, že  $|T_1, EH| = |T_1, P_1Q_1|$ .

Kolmice na  $AC$  v bodě  $T_1$  je chordálou kružnic  $\Omega$  a  $\omega_1$ . To znamená, že každý bod na této přímce má stejnou mocnost k oběma kružnicím. Průsečík této kolmice s  $AD$  a  $AB$  postupně označme  $Y$  a  $Z$ . Z mocnosti víme, že  $|YP_1|^2 = |YH|^2$  a  $|ZQ_1|^2 = |ZE|^2$ , tedy  $Y$  a  $Z$  jsou středy úseček  $HP_1$  a  $EQ_1$ .

Nyní víme, že  $P_1Q_1EH$  je lichoběžník a  $T_1$  leží na jeho střední příčce. Z toho vychází, že  $|T_1, EH| = |T_1, P_1Q_1|$  a tím pádem

$$|P_1Q_1, GF| = d + |T_1, P_1Q_1| - |X, GF| = d.$$

Obdobně můžeme ukázat, že přímky  $P_2Q_2$  a  $GH$  jsou od sebe vzdálené také  $d$ .



Tím jsme ukázali, že pravoúhelník vyřezaný přímkami  $P_1Q_1, P_2Q_2, GF, GH$  je čtverec.

POZNÁMKY:

Všechna správná řešení používala podobný postup jako ve vzorovém řešení, tedy nejprve ukázala, že přímky  $P_1Q_1, GH, GF$  a  $P_2Q_2$  vytínají obdélník a pak ukázali, že tento obdélník je čtverec. Pár lidem se stalo, že dokázali, že to je obdélník, ale už dál nedokázali, že to je čtverec.

(Petr Hladík)



### Úloha 8.

Na kružnici  $k$  leží bod  $A$  a uvnitř ní bod  $M$ . Zvolme přímku  $\ell$  procházející bodem  $M$  a označme průsečíky  $\ell$  s  $k$  jako  $B, C$ . Dokažte, že se kružnice procházející středy stran trojúhelníku  $ABC$  (tzv. Feuerbachova kružnice) dotýká pevné kružnice, která nezávisí na konkrétní volbě přímky  $\ell$ .  
(Káťa Danilina)

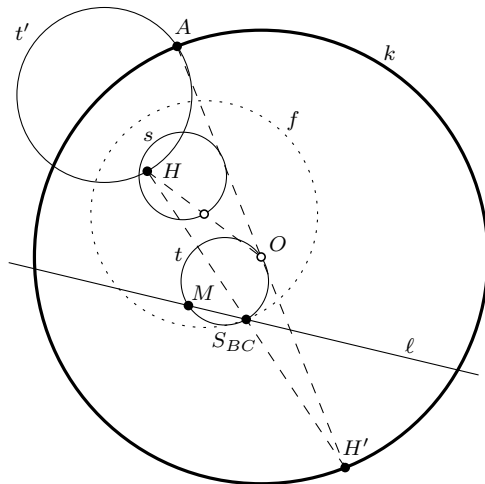
ŘEŠENÍ:

Jelikož je poloměr Feuerbachovy kružnice konstantní (o tom více později), zaměříme se na množinu možných středů této kružnice a s využitím stejnolehlosti ukážeme, že tato množina je kružnice.

Kružnice  $k$  je kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$ . Její střed označíme  $O$ . Střed  $BC$  označíme  $S_{BC}$ . Protože střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran trojúhelníku, platí  $\ell \perp OS_{BC}$ . Body  $O$  a  $M$  jsou fixní pro všechny trojúhelníky  $ABC$ . Z toho plyne, že bod  $S_{BC}$  leží na Thaletově kružnici nad průměrem  $OM$ , kterou označíme  $t$ .

Označíme průsečík výšek trojúhelníku  $ABC$  jako  $H$ . Je známé, že se  $H$  ve středové souměrnosti podle bodu  $S_{BC}$  zobrazí na kružnici opsanou do bodu  $H'$  takového, že  $AH'$  je průměrem kružnice  $k$  (tedy  $O \in AH'$ ). Všechny možné body  $S_{BC}$  leží na kružnici  $t$  a bod  $H'$  nezávisí na volbě přímky  $l$  ( $H'$  leží na průsečíku  $k$  a přímky  $OA$ ). Z toho plyne, že všechny možné body  $H$  leží na kružnici  $t'$ , která je stejnolehlým obrazem kružnice  $t$  podle středu  $H'$  s koeficientem 2 (plyne ze středové souměrnosti  $H$  a  $H'$  podle středu  $S_{BC}$ ).

Střed Feuerbachovy kružnice, kterou označíme  $f$ , leží ve středu úsečky  $OH$  a její poloměr je roven jedné polovině poloměru kružnice opsané.<sup>1</sup> Pokud tak uděláme stejnolehlé zobrazení  $t'$  podle bodu  $O$  s koeficientem  $\frac{1}{2}$ , dostaneme kružnici  $s$  s poloměrem  $r_s$  a středem  $S$ , na které leží všechny možné středy  $f$ . Jelikož průměr  $f$  nezávisí na volbě  $l$  a je roven  $\frac{|AO|}{2}$  a možné středy  $f$  leží na kružnici  $s$ , bude se každá  $f$  dotýkat kružnice se středem v  $S$  a poloměrem  $r_s + \frac{|AO|}{2}$ , což je pevná kružnice, která nezávisí na volbě  $l$ .



POZNÁMKY:

Řešení sice nedorazilo mnoho, ale většina z nich se podobným způsobem dobrala ke správnému výsledku. Některá řešení využila také vlastností Eulerovy přímky. Nejedno řešení se pak vydalo na strastiplnou cestu řešení přes analytickou geometrii.  
(Klárka Grinerová)

<sup>1</sup>Proč to platí a mnohé další se můžeš dovědět třeba zde: <https://prase.cz/archive/36/uvod1s.pdf>.