Analytická geometrie II

2. seriálová série Termín odeslání: 5. února 2024

Úlohy této série jsou řazeny podle obtížnosti, nikoliv nutně podle pořadí témat v seriálu.

Úloha 1. (5 bodů)

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojme čtverce ABB_1A_2, BCC_1B_2 a CAA_1C_2. Dále nechť K, L jsou body takové, že C_1CC_2K a B_1BB_2L jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelník AKL je pravoúhlý a rovnoramenný.

Úloha 2. (5 bodů)

Pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ má kružnici opsanou s poloměrem r. Nechť je H průsečík výšek trojúhelníka BCE. Dokažte, že platí $|AH| = 2r$.

Úloha 3. (5 bodů)

Je dán trojúhelník ABC. Kružnice jemu vepsaná má střed v bodě I a dotýká se stran AB, AC po řadě v bodech D, E. Nechť jsou D', E' takové body, že DD' a EE' jsou průměry kružnice vepsané. Dále nechť je M střed strany BC a Q průsečík přímek $D'E'$ a BC. Dokažte, že přímky IM a IQ jsou na sebe kolmé.

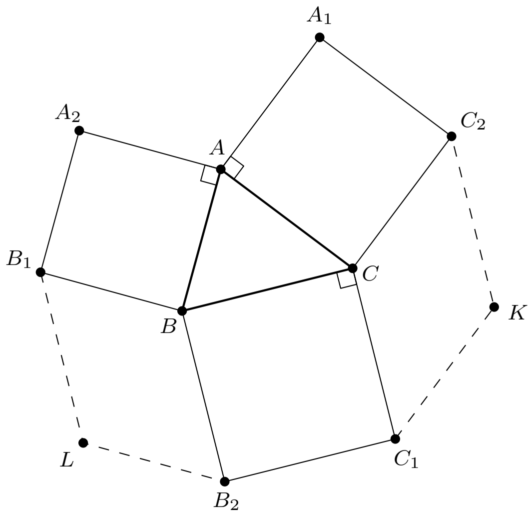
Analytická geometrie II

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojme čtverce ABB_1A_2, BCC_1B_2 a CAA_1C_2. Dále nechť K, L jsou body takové, že C_1CC_2K a B_1BB_2L jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelník AKL je pravoúhlý a rovnoramenný.

ŘEŠENÍ:
Umístíme úlohu do komplexní roviny tak, že bod A je v počátku a komplexní čísla určující pozice bodů budeme označovat příslušnými malými písmeny.



Spočteme postupně $\ell - b$. Bod A_2 je pouze otočený bod B kolem počátku o $-90°$, tedy $a_2 = b \cdot (-i) = -bi$. Protože ABB_1A_2 je rovnoběžník, platí, že $b_1 - b = a_2 - 0 = a_2 = -bi$. Úsečka BB_2 je otočená úsečka BC o $-90°$, tedy $b_2 - b = (c - b) \cdot (-i) = bi - ci$. A protože B_1BB_2L je rovnoběžník, máme

$$\ell - b = (b_1 - b) + (b_2 - b) = (-bi) + (bi - ci) = -ci.$$

Analogicky[1] spočteme $k - c$. Bod A_1 je otočené C o $90°$, tedy $a_1 = ci$, protože CAA_1C_2 je rovnoběžník, máme $c_2 - c = a_1 - 0 = a_1 = ci$. Úsečka C_1C je otočená úsečka BC o $90°$, tedy

[1] Tento výpočet můžeme nahradit pozorováním, že úloha je symetrická v B a C, jen orientace jsou otočené, a tedy místo $-i$ dostaneme $+i$.

$c_1 - c = (b-c)i = bi - ci$. Z rovnoběžníku C_1CC_2K máme

$$k - c = (c_2 - c) + (c_1 - c) = (ci) + (bi - ci) = bi.$$

Nyní už můžeme dopočítat, že

$$k = c + (k-c) = c + bi = (b - ci)i = (b + (\ell - b))i = \ell i.$$

Tedy K je otočené L o 90° kolem bodu A, a tedy $AK \perp AL$ a $|AK| = |AL|$.

Poznámky:
Většina řešitelů řešila úlohu vzorově s různými obměnami. Někteří rozepisovali souřadnice bodů vždy do imaginární a reálné části, což není nutné a akorát to lehce komplikuje zápis. Našla se i řešení čistě syntetická, která využívala podobných trojúhelníků $LBC \sim BCA \sim KC_2C$.

(Radek Olšák)

Úloha 2.

Pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ má kružnici opsanou s poloměrem r. Nechť je H průsečík výšek trojúhelníka BCE. Dokažte, že platí $|AH| = 2r$.

Řešení:
Sedmé odmocniny z jedné $\zeta_1, \ldots, \zeta_7$ tvoří v komplexní rovině pravidelný sedmiúhelník. Položme tedy sedmiúhelník $ABCDEFG$ do komplexní roviny, aby bylo $a = \zeta_7 = 1$, $b = \zeta_1$, $\ldots$, $g = \zeta_6$. Jeho kružnice opsaná má poloměr $r = 1$, proto chceme dokázat $|AH| = 2$.

Body B, C, E leží na jednotkové kružnici, takže je průsečík výšek H dán vzorcem

$$h = b + c + e = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4.$$

Chceme určit $|AH|$, podle vztahů ze seriálu ovšem snáz vyjádříme $|AH|^2$ jako

$$\begin{aligned} |AH|^2 = |h-a|^2 = (h-a)\overline{(h-a)} = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 - 1)\overline{(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 - 1)} = \\ = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 - 1)(\overline{\zeta_1} + \overline{\zeta_2} + \overline{\zeta_4} - 1). \end{aligned}$$

Podle Moivreovy věty pro libovolné k platí $\zeta_k = \zeta_1^k$ a $\overline{\zeta_k} = \zeta_1^{7-k}$. Díky tomu můžeme výraz roznásobit jen na mocniny ζ_1:

$$|AH|^2 = \zeta_1^7 + \zeta_1^6 + \zeta_1^4 - \zeta_1 + \zeta_1^8 + \zeta_1^7 + \zeta_1^5 - \zeta_1^2 + \zeta_1^{10} + \zeta_1^9 + \zeta_1^7 - \zeta_1^4 - \zeta_1^6 - \zeta_1^5 - \zeta_1^3 + 1.$$

Zároveň platí $\zeta_1^7 = \zeta_7 = 1$, neboli každou mocninu od 7 můžeme zjednodušit vzorcem $\zeta_1^{7+k} = \zeta_1^k$. Tím se téměř všechno odečte a zbyde $|AH|^2 = 4$, z čehož plyne kýžené $|AH| = 2$.

Poznámky:
Řešení byla většinou správná. Někteří si ale nevzpomněli na nějaký vzorec a místo toho použili rozpis na $\cos(\ldots) + i\sin(\ldots)$, čímž si, podle toho který vzorec vynechali, buď trošičku nebo až příšerně zkomplikovali práci rozepisováním goniometrických výrazů. *(Matouš Šafránek)*

Úloha 3.

Je dán trojúhelník ABC. Kružnice jemu vepsaná má střed v bodě I a dotýká se stran AB, AC po řadě v bodech D, E. Nechť jsou D', E' takové body, že DD' a EE' jsou průměry kružnice vepsané. Dále nechť je M střed strany BC a Q průsečík přímek $D'E'$ a BC. Dokažte, že přímky IM a IQ jsou na sebe kolmé.

Řešení:

Položme situaci do komplexní roviny, kde kružnice vepsaná je jednotková, a označme F bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC. Reprezentujme body pomocí čísel s příslušnými názvy (bodu F tedy přísluší komplexní číslo f). Pojďme postupně spočítat všechny body ze zadání. Nejprve body D', E' jsou reprezentované čísly $d' = -d$, $e' = -e$.

Body B a C jsou po řadě průsečíky tečen v bodech D, F, resp. E, F, tedy podle cvičení 52 platí

$$b = \frac{2df}{d+f}, \qquad c = \frac{2ef}{e+f}.$$

Střed M úsečky BC tedy spočítáme jako

$$m = \frac{b+c}{2} = \frac{df}{d+f} + \frac{ef}{e+f} = \frac{df(e+f)+ef(d+f)}{(e+f)(d+f)} = \frac{(d+e)f^2+2def}{(e+f)(d+f)}.$$

Konečně, bod Q spočítáme pomocí pozorování 60, kde přímka BC je tečna v F, tedy „přímka FF“

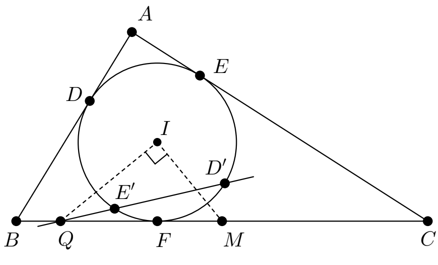
$$q = \frac{f^2(d'+e') - 2d'e'f}{f^2 - d'e'} = \frac{-f^2(d+e) - 2def}{f^2 - de} = \frac{(d+e)f^2 + 2def}{de - f^2}.$$

Abychom ukázali, že $IM \perp IQ$, stačí nám ukázat, že se argumenty čísel m a q liší o $\pm 90°$, tedy že podíl těchto dvou čísel je ryze imaginární. To už je snadný počin, jelikož se hned od pohledu bude krátit hezky. Při sdružování pamatujme, že $\overline{d} = \frac{1}{d}$:

$$\frac{m}{q} = \frac{(d+e)f^2+2def}{(e+f)(d+f)} : \frac{(d+e)f^2+2def}{de-f^2} = \frac{de-f^2}{(e+f)(d+f)},$$

$$\overline{\left(\frac{m}{q}\right)} = \overline{\left(\frac{de-f^2}{(e+f)(d+f)}\right)} = \frac{\frac{1}{de} - \frac{1}{f^2}}{\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{f}\right)} = \frac{f^2-de}{(f+e)(f+d)} = -\frac{m}{q}.$$

Hledaný podíl je ryze imaginární, tedy (podle věty 35) $IM \perp IQ$, což jsme chtěli.



Poznámky:

Většina odevzdaných řešení postupovala obdobně jako vzorové řešení, jen pár z vás si neuvědomilo, že $\overline{d} = \frac{1}{d}$, což potom lehce zesložitilo výpočty. Ale jinak pochvala. *(Zdeněk Pezlar)*