

Analytická geometrie II

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. ÚNORA 2024

Úlohy této série jsou řazeny podle obtížnosti, nikoliv nutně podle pořadí témat v seriálu.

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojme čtverce ABB_1A_2 , BCC_1B_2 a CAA_1C_2 . Dále nechť K , L jsou body takové, že C_1CC_2K a B_1BB_2L jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelník AKL je pravoúhlý a rovnostranný.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ má kružnici opsanou s poloměrem r . Nechť je H průsečík výšek trojúhelníka BCE . Dokažte, že platí $|AH| = 2r$.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Je dán trojúhelník ABC . Kružnice jemu vepsaná má střed v bodě I a dotýká se stran AB , AC po řadě v bodech D , E . Nechť jsou D' , E' takové body, že DD' a EE' jsou průměry kružnice vepsané. Dále nechť je M střed strany BC a Q průsečík přímek $D'E'$ a BC . Dokažte, že přímky IM a IQ jsou na sebe kolmé.

Analytická geometrie II

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

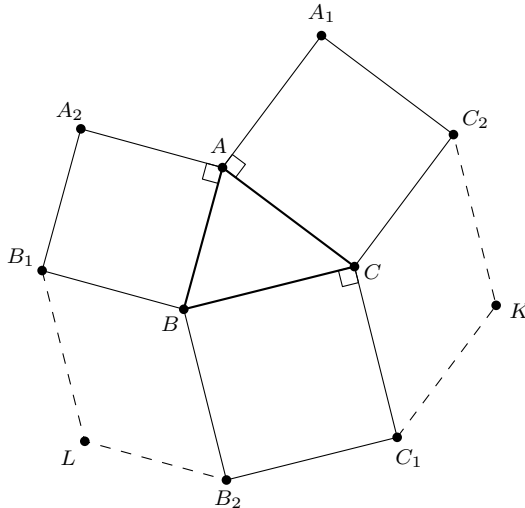
VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojme čtverce ABB_1A_2 , BCC_1B_2 a CAA_1C_2 . Dále necht' K , L jsou body takové, že C_1CC_2K a B_1BB_2L jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelník AKL je pravoúhlý a rovnoramenný.

ŘEŠENÍ:

Umístíme úlohu do komplexní roviny tak, že bod A je v počátku a komplexní čísla určující pozice bodů budeme označovat příslušnými malými písmeny.



Spočteme postupně $\ell - b$. Bod A_2 je pouze otočený bod B kolem počátku o -90° , tedy $a_2 = b \cdot (-i) = -bi$. Protože ABB_1A_2 je rovnoběžník, platí, že $b_1 - b = a_2 - 0 = a_2 = -bi$. Úsečka BB_2 je otočená úsečka BC o -90° , tedy $b_2 - b = (c - b) \cdot (-i) = bi - ci$. A protože B_1BB_2L je rovnoběžník, máme

$$\ell - b = (b_1 - b) + (b_2 - b) = (-bi) + (bi - ci) = -ci.$$

Analogicky¹ spočteme $k - c$. Bod A_1 je otočené C o 90° , tedy $a_1 = ci$, protože CAA_1C_2 je rovnoběžník, máme $c_2 - c = a_1 - 0 = a_1 = ci$. Úsečka C_1C je otočená úsečka BC o 90° , tedy

¹Tento výpočet můžeme nahradit pozorováním, že úloha je symetrická v B a C , jen orientace jsou otočené, a tedy místo $-i$ dostaneme $+i$.

$c_1 - c = (b - c)i = bi - ci$. Z rovnoběžníku C_1CC_2K máme

$$k - c = (c_2 - c) + (c_1 - c) = (ci) + (bi - ci) = bi.$$

Nyní už můžeme dopočítat, že

$$k = c + (k - c) = c + bi = (b - ci)i = (b + (l - b))i = li.$$

Tedy K je otočené L o 90° kolem bodu A , a tedy $AK \perp AL$ a $|AK| = |AL|$.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů řešila úlohu vzorově s různými obměnami. Někteří rozepisovali souřadnice bodů vždy do imaginární a reálné části, což není nutné a akorát to lehce komplikuje zápis. Našla se i řešení čistě syntetická, která využívala podobných trojúhelníků $LBC \sim BCA \sim KC_2C$.

(Radek Olšák)

Úloha 2.

Pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ má kružnici opsanou s poloměrem r . Necht' je H průsečík výšek trojúhelníka BCE . Dokažte, že platí $|AH| = 2r$.

ŘEŠENÍ:

Sedmé odmocniny z jedné ζ_1, \dots, ζ_7 tvoří v komplexní rovině pravidelný sedmiúhelník. Položme tedy sedmiúhelník $ABCDEFG$ do komplexní roviny, aby bylo $a = \zeta_7 = 1$, $b = \zeta_1, \dots, g = \zeta_6$. Jeho kružnice opsaná má poloměr $r = 1$, proto chceme dokázat $|AH| = 2$.

Body B, C, E leží na jednotkové kružnici, takže je průsečík výšek H dán vzorcem

$$h = b + c + e = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4.$$

Chceme určit $|AH|$, podle vztahů ze seriálu ovšem snáz vyjádříme $|AH|^2$ jako

$$\begin{aligned} |AH|^2 &= |h - a|^2 = (h - a)\overline{(h - a)} = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 - 1)\overline{(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 - 1)} = \\ &= (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 - 1)(\overline{\zeta_1} + \overline{\zeta_2} + \overline{\zeta_4} - 1). \end{aligned}$$

Podle Moivreovy věty pro libovolné k platí $\zeta_k = \zeta_1^k$ a $\overline{\zeta_k} = \zeta_1^{7-k}$. Díky tomu můžeme výraz roznásobit jen na mocniny ζ_1 :

$$|AH|^2 = \zeta_1^7 + \zeta_1^6 + \zeta_1^4 - \zeta_1 + \zeta_1^8 + \zeta_1^7 + \zeta_1^5 - \zeta_1^2 + \zeta_1^{10} + \zeta_1^9 + \zeta_1^7 - \zeta_1^4 - \zeta_1^6 - \zeta_1^5 - \zeta_1^3 + 1.$$

Zároveň platí $\zeta_1^7 = \zeta_7 = 1$, neboli každou mocninu od 7 můžeme zjednodušit vzorcem $\zeta_1^{7+k} = \zeta_1^k$. Tím se téměř všechno odečte a zbyde $|AH|^2 = 4$, z čehož plyne kýžené $|AH| = 2$.

POZNÁMKY:

Řešení byla většinou správná. Někteří si ale nevzpomněli na nějaký vzorec a místo toho použili rozpis na $\cos(\dots) + i \sin(\dots)$, čímž si, podle toho který vzorec vynechali, buď trošičku nebo až přílišně zkomplikovali práci rozepisováním goniometrických výrazů.

(Matouš Šafránek)

Úloha 3.

Je dán trojúhelník ABC . Kružnice jemu vepsaná má střed v bodě I a dotýká se stran AB , AC po řadě v bodech D , E . Nechtě jsou D' , E' takové body, že DD' a EE' jsou průměry kružnice vepsané. Dále nechtě je M střed strany BC a Q průsečík přímek $D'E'$ a BC . Dokažte, že přímky IM a IQ jsou na sebe kolmé.

ŘEŠENÍ:

Položme situaci do komplexní roviny, kde kružnice vepsaná je jednotková, a označme F bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC . Reprezentujeme body pomocí čísel s příslušnými názvy (bod F tedy přísluší komplexní číslo f). Pojdme postupně spočítat všechny body ze zadání. Nejprve body D' , E' jsou reprezentované čísly $d' = -d$, $e' = -e$.

Body B a C jsou po řadě průsečíky tečen v bodech D , F , resp. E , F , tedy podle cvičení 52 platí

$$b = \frac{2df}{d+f}, \quad c = \frac{2ef}{e+f}.$$

Střed M úsečky BC tedy spočítáme jako

$$m = \frac{b+c}{2} = \frac{df}{d+f} + \frac{ef}{e+f} = \frac{df(e+f) + ef(d+f)}{(e+f)(d+f)} = \frac{(d+e)f^2 + 2def}{(e+f)(d+f)}.$$

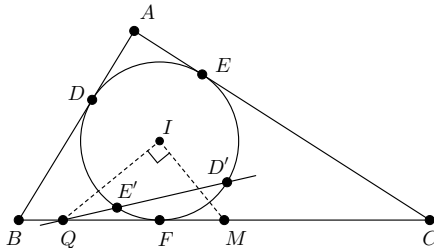
Konečně, bod Q spočítáme pomocí pozorování 60, kde přímka BC je tečna v F , tedy „přímka FF' “

$$q = \frac{f^2(d'+e') - 2d'e'f}{f^2 - d'e'} = \frac{-f^2(d+e) - 2def}{f^2 - de} = \frac{(d+e)f^2 + 2def}{de - f^2}.$$

Abychom ukázali, že $IM \perp IQ$, stačí nám ukázat, že se argumenty čísel m a q liší o $\pm 90^\circ$, tedy že podíl těchto dvou čísel je ryze imaginární. To už je snadný počín, jelikož se hned od pohledu bude krátit hezky. Při sdružování pamatujeme, že $\bar{d} = \frac{1}{d}$:

$$\begin{aligned} \frac{m}{q} &= \frac{(d+e)f^2 + 2def}{(e+f)(d+f)} : \frac{(d+e)f^2 + 2def}{de - f^2} = \frac{de - f^2}{(e+f)(d+f)}, \\ \left(\frac{m}{q}\right) &= \frac{\overline{(de - f^2)}}{\overline{(e+f)(d+f)}} = \frac{\frac{1}{de} - \frac{1}{f^2}}{\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right)} = \frac{f^2 - de}{(f+e)(f+d)} = -\frac{m}{q}. \end{aligned}$$

Hledaný podíl je ryze imaginární, tedy (podle věty 35) $IM \perp IQ$, což jsme chtěli.



POZNÁMKY:

Většina odevzdaných řešení postupovala obdobně jako vzorové řešení, jen pár z vás si neuvědomilo, že $\bar{d} = \frac{1}{d}$, což potom lehce zesložilo výpočty. Ale jinak pochvala. (Zdeněk Pezlar)