Prostory a roviny

2. podzimní série Termín odeslání: dd. mm 2024

Úloha 1. (3 body)
Ondra má papír ve tvaru čtverce o straně délky 3. Poraďte mu, jak z papíru vystřihnout souvislý útvar o obsahu 6, ze kterého pak bude moci složit krychli o hraně délky 1.

Úloha 2. (3 body)
Alicka našla krychli o hraně délky 1 a obdélníkový proužek papíru 1×12. Jak lze proužek obmotat kolem krychle tak, aby všechny její stěny byly v každém bodě pokryty dvěma vrstvami papíru? Proužek se smí přehýbat, ale ne stříhat.

Úloha 3. (3 body)
Rozhodněte, zda existuje rovina, jejíž řez pravidelným dvanáctistěnem je pravidelný šestiúhelník.

Úloha 4. (5 bodů)
Planeta Čuník je dokonalá koule. Vědci z hlavního města Rypáček postavili supermoderní vesmírnou loď Ocásek s inovativním pohonem. Ocásek si každou vteřinu vybere nějakou přímku tečnou k Čuníku, na které se nachází, a popoletí po ní o libovolnou celočíselnou vzdálenost. Ocásek vyrazil na testovací misi, která začala v Rypáčku a skončila opět někde na povrchu Čuníka. Dokažte, že Ocásek na misi uletěl sudou celočíselnou vzdálenost.

Úloha 5. (5 bodů)
Rozhodněte, zda lze šest hran libovolného nedegenerovaného čtyřstěnu rozdělit na dvě trojice tak, aby z každé z nich šel poskládat nedegenerovaný trojúhelník.

Úloha 6. (5 bodů)
V PraSeploše stojí několik měst. Mezi každou dvojicí měst vede nanejvýš jedna silnice. Silnice se smí libovolně klikatit, ale nemohou se křížit (ani mimoúrovňově).[1] Dokažte, že z nich lze udělat jednosměrné silnice tak, aby z každého města šlo vycestovat nanejvýš třemi silnicemi.

Úloha 7. (5 bodů)
V prostoru je dán mnohostěn M a uvnitř něj bod P, kterým prochází několik (alespoň jedna) přímek $\ell_1, \ldots, \ell_n$. *Význačnou* přímkou stěny mnohostěnu M nazveme tu z přímek $\ell_1, \ldots, \ell_n$, která s její rovinou svírá největší úhel. Svírá-li více přímek tentýž největší úhel, volíme za význačnou libovolnou z nich. Dokažte, že existuje stěna mnohostěnu M, která je protnuta svou význačnou přímkou.

Úloha 8. (5 bodů)
Úhlopříčky základny $ABCD$ čtyřbokého jehlanu $ABCDS$ jsou navzájem kolmé. Navíc je jejich průsečík P zároveň kolmým průmětem vrcholu S na základnu. Dokažte, že všechny čtyři kolmé průměty bodu P na roviny ABS, BCS, CDS a DAS leží na jedné kružnici.

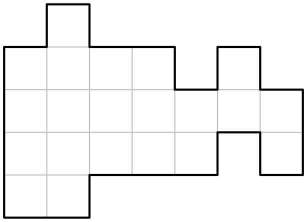
[1] Formálně řečeno tedy města a silnice představují *nakreslení rovinného grafu*. O rovinných grafech se lze více dozvědět v seriálu Letem grafovým světem zde: *https://prase.cz/archive/34/serial2.pdf*.

Dělení

2. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

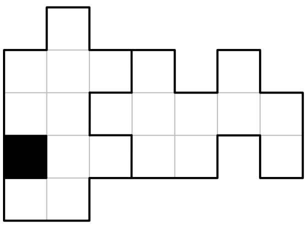
Úloha 1.

Káťa a Pepa si koupili křivolakou tabulku čokolády složenou z malých čtverečků jako na obrázku níže, kterou si chtěli co nejférověji rozdělit. Než to však stihli učinit, přišel Matěj a jeden čtvereček jim z tabulky snědl. Který čtvereček mohl sníst, aby si posléze Káťa a Pepa dovedli zbytek tabulky rozdělit na dva shodné útvary? Čokoládu je povoleno dělit pouze řezy podél hran čtverečků.



(Káťa Danilina)

ŘEŠENÍ:
Matěj mohl sníst tmavě vyznačený dílek a Káťa s Pepou si pak mohli podle tlusté čáry čokoládu rozdělit na dva shodné útvary. Pokud levý útvar otočíme o 90° proti směru hodinových ručiček, lze na sebe útvary přesunout a přesvědčit se, že jsou shodné.



Takovouto úlohu je možné řešit metodou pokus omyl, ale můžeme na to jít chytřeji. Původních dílků je 21. Když Matěj jeden dílek sní, zbyde sudý počet dílků, a bude tak splněn první předpoklad pro to, abychom mohli čokoládu rozdělit.

Dílky můžeme obarvit dvěma barvami jako šachovnici. Dílků jedné barvy bude o 1 více než dílků druhé barvy a víme tak, že musíme odebrat jeden z 11 dílků barvy s větším zastoupením. Nesmí to ale být takový dílek, po jehož odebrání by se čokoláda rozdělila na dva neshodné útvary. Nakonec ještě můžeme porovnat šířku a výšku čokolády, z čehož plyne, že výsledné dva útvary mohou mít šířku nebo výšku nejvýše 5 dílků.

Poznámky:
Volejme sláva a tři dny se radujme… Prakticky všechna řešení byla správná a lišila se převážně jen uměleckostí nákresu. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 2.

Dokažte, že pokud pro celá čísla a, b platí $2024^2 - 1 \mid 2023a + 2025b$, potom též $2024^2 - 1 \mid a \cdot b$. *(Matouš Šafránek)*

Řešení:
Nejprve si upravme člen $2024^2 - 1$. Pomocí vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ dostáváme

$$2024^2 - 1 = (2024 - 1)(2024 + 1) = 2023 \cdot 2025.$$

Tedy zadání můžeme přepsat jako

$$2024^2 - 1 = 2023 \cdot 2025 \mid 2023a + 2025b.$$

Dále podotkněme, že čísla 2023, 2025 jsou nesoudělná. Jelikož se liší o 2, jejich jediným společným dělitelem větším než 1 by mohla být 2, ale to nejde, protože jsou lichá. Nyní se pusťme do důkazu $2023 \mid b$ a $2025 \mid a$, z čehož dostaneme $2024^2 - 1 = 2023 \cdot 2025 \mid a \cdot b$. Neboli $b = 2023z_1, z_1 \in \mathbb{Z}$ a $a = 2025z_2, z_2 \in \mathbb{Z}$, z čehož dostaneme $a \cdot b = 2025z_2 \cdot 2023z_1 = 2025 \cdot 2023 \cdot z_1 \cdot z_2$.

Ze zadání máme

$$2023 \cdot 2025 \mid 2023a + 2025b,$$

tedy $2023 \mid 2023a + 2025b$ a $2025 \mid 2023a + 2025b$. Víme, že pokud 2023 a 2025 dělí součet a zároveň jednoho ze sčítanců beze zbytku, musí dělit beze zbytku i druhého ze sčítanců. Tedy v tomto případě $2023 \mid 2025b$ a $2025 \mid 2023a$. Jelikož ale 2023, 2025 jsou nesoudělná, musí být $2023 \mid b$ a $2025 \mid a$. Což nám dokazuje tvrzení.

Poznámky:
Většina řešení byla napsána velmi hezky. Bodíky jsem občas strhla, pokud v důkazu byla použita nesoudělnost, ale nebyla zmíněna. V podstatě všechna správná řešení splňovala osnovu jako vzorové řešení (přestože někdy to bylo mazaně zamaskováno). Jen jedno řešení se vůbec netrefilo.
(Anna Marie Minarovičová)

Úloha 3.

Ukažte, že mezi libovolnými 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly se vždy nachází alespoň jedno, jehož ciferný součet je dělitelný 11. *(Natália Bátorová)*

Řešení:
Mezi uvažovanými čísly najděme nejmenší takové, které má na pozici jedniček 0, a označme si ho n. Následně si uvědomme, že před číslem n se nachází maximálně 9 menších čísel, tudíž mezi našimi 39 čísly vždy budeme mít všechna čísla od n po $n + 29$.

Dále se podívejme na čísla n, $n + 1$, $n + 2$, …, $n + 9$. Označíme-li si ciferný součet čísla n jako $S(n)$, tak vidíme, že tato čísla mají ciferné součty $S(n)$, $S(n) + 1$, $S(n) + 2$, …, $S(n) + 9$. Nyní se zaměřme na číslo $n + 10$. U něj mohou nastat dva případy:

V prvním případě se při přechodu z $n + 9$ na $n + 10$ změní pouze cifra na pozici jedniček (klesne z 9 na 0) a cifra na pozici desítek (o 1 vzroste). Celkový ciferný součet klesne o 8, takže platí $S(n + 10) = S(n + 9) - 8 = S(n) + 1$, z čehož následně plyne $S(n + 19) = S(n) + 10$. Ciferné součty $S(n)$, $S(n + 1)$, …, $S(n + 9)$, $S(n + 19)$ jsou pak souborem 11 po sobě jdoucích přirozených čísel, jedno z nich tedy musí být dělitelné 11, čímž máme pro tuto variantu hotovo.

Ve druhém případě má číslo $n + 9$ cifru 9 i na pozici desítek (čili koncové dvojčíslí 99), při přechodu na $n + 10$ se tak změní i cifra na pozici stovek (a případně i tisíců a vyšších řádů), čímž se hodnota $S(n+10)$ změní nepředvídatelně. Klíčové je si ovšem uvědomit, že tento „přechod přes stovky“ může pro 39 po sobě jdoucích čísel nastat nanejvýš jednou, mezi čísly $n+19$ a $n+20$ už tedy nenastane. Místo $S(n)$, $S(n+1)$, ..., $S(n+9)$, $S(n+19)$ proto stačí uvážit ciferné součty $S(n+10)$, $S(n+11)$, $S(n+12)$, ..., $S(n+19)$, $S(n+29)$ a opět dostaneme soubor 11 po sobě jdoucích přirozených čísel, jedno z nich jistě dělitelné 11. Tím jsme vyřešili i tuto variantu, úloha je tedy hotová.

Poznámky:

Většina došlých řešení pracovala s nějakou variantou výše popsaného postupu a vysloužila si plný počet bodů. :) *(Josef „José“ Soural)*

Úloha 4.

Fíla vzal své oblíbené přirozené číslo n a následně na tabuli pro každé z přirozených čísel $n+1$ až $2n$ napsal jeho největšího lichého dělitele. Určete součet všech čísel na tabuli. *(Káťa Danilina)*

Řešení:

Nech $d(k)$ značí najväčšieho nepárneho deliteľa čísla k a nech $S(n)$ značí súčet všetkých čísel na tabuli pre obľúbené číslo n. Na začiatok zistíme, čomu je rovné $S(1)$. To bude jednoduché, pretože $S(1) = d(2) = 1$, keďže 1 je zrejme najväčší nepárny deliteľ čísla 2.

Teraz sa skúsme pozrieť na $S(n+1) - S(n)$. Platí

$$S(n) = d(n+1) + d(n+2) + \cdots + d(2n),$$
$$S(n+1) = d(n+2) + \cdots + d(2n) + d(2n+1) + d(2n+2).$$

Z toho máme

$$S(n+1) - S(n) = d(2n+1) + d(2n+2) - d(n+1).$$

Všimnime si však, že platí $d(n+1) = d(2(n+1)) = d(2n+2)$, pretože vynásobením $n+1$ číslom 2 určite nezmeníme najväčšieho nepárneho deliteľa. Ďalej platí $d(2n+1) = 2n+1$, keďže $2n+1$ je nepárne číslo. To znamená, že

$$S(n+1) - S(n) = d(2n+1) + d(2n+2) - d(n+1) = 2n+1,$$

takže $S(n+1) = S(n) + 2n + 1$. Teraz vieme pokračovať dvoma spôsobmi.

Riešenie pomocou indukcie:

Ak sme nejakým spôsobom uhádli, že by mohlo platiť $S(n) = n^2$, tak to vieme jednoducho dokázať matematickou indukciou. Vieme, že platí $S(1) = 1 = 1^2$, takže máme prvý krok. Predpokladajme, že platí $S(n) = n^2$ a ukážeme že platí $S(n+1) = (n+1)^2$. To je však jednoduché, pretože

$$S(n+1) = S(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Z toho máme, že pre všetky prirodzené n platí $S(n) = n^2$, čo je hľadaný súčet všetkých čísel na tabuli.

Riešenie bez indukcie:

Ak nevieme, čomu bude $S(n)$ rovné, môžeme pokračovať s využitím $S(n+1) = S(n) + 2n + 1$ takto[1]

$$S(n) = S(1) + \sum_{i=1}^{n-1}(2i+1) = 1 + 2\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} 1 =$$
$$= 1 + 2\cdot\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = 1 + n^2 - n + n - 1 = n^2.$$

Dostávame tak, že $S(n) = n^2$, čo je hľadaný súčet všetkých čísel na tabuli.

[1] Pričom využijeme známy vzťah, že platí $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dôkaz je možné nájsť napríklad tu: *https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number.*

Poznámky:

Väčšina riešení postupovala z veľkej časti ako to vzorové s tým, že riešenia boli často skrátené vďaka uhádnutiu odopovede n^2 a následným dôkazom pomocou matematickej indukcie. *(Michal Pecho)*

Úloha 5.

PraSestán má tvar čtverce, který je $n-1$ svislými a $n-1$ vodorovnými přímkami rozdělen na n^2 obdélníkových provincí. Řekneme, že provincie A se vejde do provincie B, pokud lze B otočit o celočíselný násobek 90° a přesunout tak, aby zakryla celou A. Dokažte, že můžeme vybrat $2n$ provincií tak, aby se pro libovolné dvě z nich jedna vešla do druhé. *(Josef Minařík)*

Řešení:

Problém budu řešit pro $n > 1$. Pro $n = 1$ je snadné nahlédnout, že tvrzení neplatí.

Začněme drobným úklidem. Všimneme si, že svislé přímky ohraničují sloupce. Tyto sloupce si přeskládáme tak, aby nalevo byl nejužší a napravo nejširší. Stejně tak přeskládáme řádky ohraničené vodorovnými přímkami, aby nahoře byly ty nejnižší a dole ty nejvyšší. Je dobré si rozmyslet, že rozměry provincií se nezmění.

Nyní mějme množinu provincií P. Pokud pro libovolné dvě provincie v této množině platí, že jedna se vejde do druhé, budeme jí říkat šunková.

Nyní si všimneme, že vezmeme-li si libovolnou provincii, tak ta nalevo i ta nahoře se do ní vejde. Tedy začneme-li v pravé dolní provincii a rozhodneme se provést průchod provinciemi tak, že jako následující provincii volíme nějakou nahoru nebo doleva. Tak projdeme $2n-1$ provinciemi, které se do sebe vejdou. Stačí nám tedy najít nějakou takovou, že neleží na našem průchodu a je s ostatními provinciemi šunková.

Provincii v řádku j a sloupci i nazvu $A_{i,j}$. Dále x_i a y_j nechť jsou šířka a výška sloupce i či řádku j.

Nyní ukážeme, že existuje čtveřice provincií $A_{i,j}$, $A_{i+1,j}$, $A_{i,j+1}$ a $A_{i+1,j+1}$ taková, že jsou šunkové. Uvědomím si, že daná čtveřice není šunková právě tehdy, když

$$y_{j+1} > x_{i+1} \quad \text{a} \quad y_j > x_i, \qquad \text{nebo} \qquad y_{j+1} < x_{i+1} \quad \text{a} \quad y_j < x_i.$$

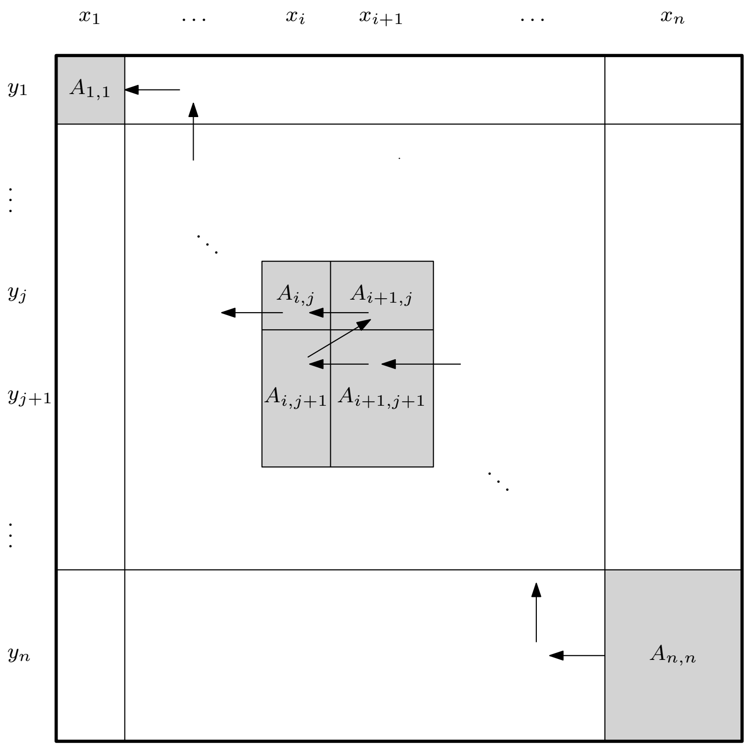
Tedy pokud jednu z provincií $A_{i,j+1}$, $A_{i+1,j}$ otočím, tak se nevejde do druhé. Všimněme si, že pokud $y_{j+1} > x_{i+1}$, pak musí platit i $y_{j+2} > x_{i+2}$. Tedy všechny nerovnosti musí být jedním směrem.

Pro spor předpokládejme, že žádná taková čtveřice neexistuje. Pak tedy platí $x_i > y_i$ pro všechna $1 \le i \le n$, nebo $x_i < y_i$ pro všechna $1 \le i \le n$. Z toho dostaneme, že

$$x_1 + \cdots + x_n > y_1 + \cdots + y_n, \qquad \text{nebo} \qquad x_1 + \cdots + x_n < y_1 + \cdots + y_n.$$

To ale nemůže platit, protože součet délek musí být stejný. Tedy nějaká taková čtveřice musí existovat.

Nyní jenom v průchodu projdu přes $A_{i,j}$, $A_{i+1,j}$ a $A_{i+1,j+1}$, což zvládnu. K provinciím průchodu přidám provincii $A_{i,j+1}$. Ta se buď vejde do $A_{i+1,j}$, nebo $A_{i+1,j}$ se vejde do ní. Vím, že $A_{i,j+1}$ se vejde do $A_{i+1,j+1}$, tedy se musí vejít do všech provincií, do kterých se vejde $A_{i+1,j+1}$. Stejně tak se do ní vejde $A_{i,j}$, a tedy se do ní vejdou i provincie, do kterých se vejdou do $A_{i+1,j+1}$. Našli jsme tedy šunkovou množinu provincií o $2n$ prvcích.



POZNÁMKY:
Většina řešení byla správně a postupovala obdobně, některá obratněji, jiná méně.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 6.

Je dáno prvočíslo p. Najděte všechny p-tice $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ celých čísel takové, že pro každé přirozené číslo n platí

$$p \mid a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n.$$

(Matouš Šafránek)

ŘEŠENÍ:
Ukážeme, že to jsou právě ty p-tice, kde mají všechna a_i stejný zbytek po dělení p. Jelikož nás zajímá jen dělitelnost p, můžeme pracovat jen s kongruencemi modulo p. Dále v řešení všechny kongruence tedy myslíme modulo p. V řeči kongruencí vyhovují ty p-tice, pro které platí $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_p$. Vyhovují, protože pak umocněním na n-tou dostaneme $a_1^n \equiv a_2^n \equiv \dots \equiv a_p^n$, takže

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n \equiv p \cdot a_1^n \equiv 0.$$

Zbývá dokázat, že všechna čísla v p-tici musí být kongruentní. Nejprve dokážeme, že pokud p-tice $a_1, a_2, \dots, a_p$ vyhovuje zadání, vyhovuje i p-tice posunutá o celé číslo k, totiž p-tice $a_1 + k, a_2 + k, \dots, a_p + k$. Pro každé n můžeme sumu $(a_1+k)^n + (a_2+k)^n + \dots + (a_p+k)^n$ rozepsat pomocí binomické věty

$$\sum_{i=1}^{p} (a_i + k)^n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_i^j k^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} \sum_{i=1}^{p} a_i^j \equiv \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} \cdot 0 = 0.$$

Použili jsme předpoklad, že $a_1^j + a_2^j + \cdots + a_p^j \equiv 0$ pro každé přirozené j a také fakt, že $a_1^0 + a_2^0 + \cdots + a_p^0 = p \equiv 0$, kde pokud je $a_i = 0$, tak v binomické větě stále funguje pokládat a_i^0 za 1. Tím je dokázáno, že $(a_1+k)^n + (a_2+k)^n + \cdots + (a_p+k)^n \equiv 0$ pro každé n, takže posunutá p-tice vyhovuje. Speciálně pro $k = -a_1$ dostaneme, že máme-li vyhovující p-tici $a_1, a_2, \ldots, a_p$, vyhovuje i p-tice $a_1 - a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_p - a_1$, kterážto má na prvním místě nulu.

Uvažme dále kongruenci pro mocninu $n = p - 1$. Pak pokud $a_i - a_1 \not\equiv 0$, tak podle malé Fermatovy věty $(a_i - a_1)^{p-1} \equiv 1$. A v případě $a_i - a_1 \equiv 0$ je $(a_i - a_1)^{p-1} \equiv 0$. Takže můžeme v součtu $(a_1 - a_1)^{p-1} + (a_2 - a_1)^{p-1} + \cdots + (a_p - a_1)^{p-1}$ počítat jenom nuly a jedničky, čili tento součet může být v intervalu 0 až p. Aby byl dělitelný p, musí tedy být 0 nebo p, čili součet samých nul (všechna $a_i - a_1 \equiv 0$) nebo samých jedniček (všechna $a_i - a_1 \not\equiv 0$). Jelikož ale pro $i = 1$ platí $a_i - a_1 \equiv 0$, musí to platit i pro všechna i, z čehož plyne, že pro každé i platí $a_i \equiv a_1$.

Alternativní řešení:
Všimneme si, že pro každý polynom Q s celočíselnými koeficienty platí[2]

$$Q(a_1) + Q(a_2) + \cdots + Q(a_p) \equiv 0.$$

To proto, že je-li $Q = k_n x^n + \cdots + k_1 x + k_0$, tak je

$$Q(a_1) + Q(a_2) + \cdots + Q(a_p) = k_n(a_1^n + \cdots + a_p^n) + \cdots + k_1(a_1 + \cdots + a_p) + k_0 \cdot p.$$

U každého koeficientu vyjde něco kongruentního nule.

Uvažme polynom Q, který má kořeny ve všech číslech (zbytcích) $0, 1, \ldots, p-1$ kromě a_1. Ten umíme snadno sestavit jako

$$Q(x) = (x-0)(x-1)\cdots(x-(a_1-1))\,(x-(a_1+1))\cdots(x-(p-1)).$$

Pak pokud $a_i \not\equiv a_1$, tak $Q(a_i) \equiv 0$, a v případě $a_i \equiv a_1$ je $Q(a_i) \equiv Q(a_1) \not\equiv 0$. Takže můžeme v součtu $Q(a_1) + Q(a_2) + \cdots + Q(a_p)$ počítat jen nuly a $Q(a_1)$. Je tam alespoň jedno $Q(a_1)$, které je s p nesoudělné, takže aby součet byl kongruentní nule, musí jich být všech p, pročež musí být $a_i \equiv a_1$ pro všechna i.

Poznámky:
Většina řešitelů si s úlohou poradila jedním z těchto dvou způsobů. Pak bylo pár řešení bez důkazu.

(Matouš Šafránek)

Úloha 7.

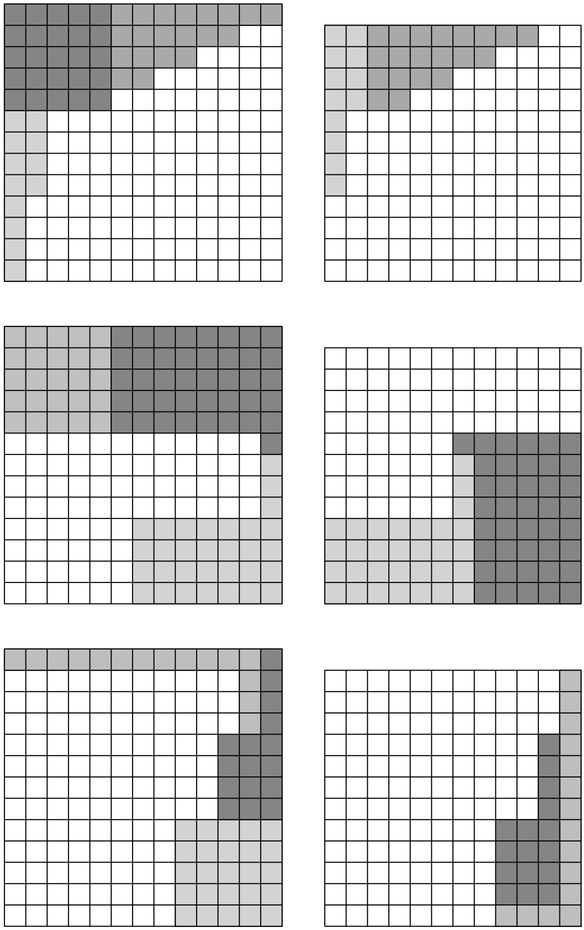
Matouš si ve slevě pořídil čtvercovou tabulku 13×13 a všiml si, že $13^2 = 12^2 + 5^2$. Tabulku chce proto rozřezat na několik dílů a následně z nich sestavit dvě nové tabulky o rozměrech 12×12 a 5×5. Řezy lze vézt pouze po hranách políček tabulky (ne nutně však jedním rovným řezem) a vzniklé díly je povoleno otáčet i překlápět. Na kolik nejméně dílů musí Matouš tabulku rozdělit, aby z nich skutečně dovedl sestavit dvě nové tabulky 12×12 a 5×5? (Matouš Šafránek)

Řešení:
Dokážeme, že tabulku 13×13 je potřeba rozdělit nejméně na čtyři díly tak, aby z nich následně šlo sestavit dvě nové tabulky 12×12 a 5×5.

Nejprve ukážeme, že tabulku nelze rozdělit na 3 nebo méně dílů. Pro spor předpokládejme, že máme vyhovující rozřezání tabulky na tři díly. Pak jeden z dílů obsahuje alespoň dva ze čtyř rohových dílků původní tabulky 13×13. Tento díl musí mít v nějakém směru velikost 13 čtverečků, tedy ho určitě žádným natočením nelze vložit do tabulky 12×12 či do tabulky 5×5. To je požadovaný spor.

[2] Můžeme Q uvažovat i jako polynom nad $\mathbb{Z}_p$, nakonec jde zase jen o hodnoty modulo p.

Příklady rozřezání tabulky 13×13 na čtyři díly a jejich následné složení do tabulek 12×12 a 5×5 jsou například tyto. Poznamenejme, že tabulku 5×5 vyřízneme vždy v celku.



Poznámky:
Úloha nebyla těžká a mnoho řešitelů si s ní zdárně poradilo. Rozdílných konstrukcí pro čtyři díly dorazilo sedm, výše jsou ty nejčastější. Bohužel, nemalá část přijatých řešení tvrdila, že nejmenší je jiný počet dílů, a chybně odargumentovala, proč tomu tak je. *(Denisa Hanušková)*

Úloha 8.

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla n, k platí

$$\left(n!\right)^{1+n+n^2+\cdots+n^{k-1}} \,\Big|\, \left(n^k\right)!.$$

(Matěj Doležálek)

Řešení:

Úlohu si můžeme přeformulovat. Ekvivalentně chceme dokázat, že výraz

$$\frac{(n^k)!}{(n!)^{1+n+n^2+\cdots+n^{k-1}}}$$

nabývá celočíselné hodnoty. S tímto výrazem se ale ještě poměrně špatně pracuje, a tak provedeme fikaný teleskopický trik:

$$\frac{(n^k)!}{(n!)^{1+n+n^2+\cdots+n^{k-1}}} = \frac{n!}{1!\cdot n!}\cdot\frac{(n^2)!}{n!\cdot(n!)^n}\cdot\frac{(n^3)!}{(n^2)!\cdot(n!)^{n^2}}\cdots\frac{(n^k)!}{(n^{k-1})!\cdot(n!)^{n^{k-1}}} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k}\frac{(n^i)!}{(n^{i-1})!\cdot(n!)^{n^{i-1}}}.$$

Tato rovnost funguje, protože se nám všichni čitatelé kromě posledního vždy vykrátí s částí následujícího jmenovatele. Ve jmenovateli i-tého členu poté zbude $(n!)^{n^{i-1}}$, což se nám celkově posbírá na požadovaný jmenovatel (v prvním jmenovateli ještě zbude 1!, ale to nic nemění).

Dále by nám tedy stačilo dokázat, že pro každé i daný výraz

$$\frac{(n^i)!}{(n^{i-1})!\cdot(n!)^{n^{i-1}}}$$

nabývá celočíselné hodnoty. Když se nám toto povede, pak bude celkový výraz součin několika celých čísel, tedy bude sám celočíselný.

Pojďme to nahlédnou kombinatorickou úvahou. Představme si, že máme n^i prvků a zajímal by nás počet možností, jak je můžeme rozdělit do n^{i-1} množin po n prvcích. Můžeme si představit, že všech n^i prvků si nějak poskládáme do řady – to zvládneme udělat pomocí $(n^i)!$ způsobů; a poté tuto řadu „nasekáme na kusy“ velikosti n. Tedy prvních n prvků dáme do první množiny, dalších n do druhé, a tak dále. Takto ale některé možnosti započítáme vícekrát. Konkrétně jednak můžeme množiny libovolně prohazovat, protože nás nezajímá, která je první, druhá, atd., zajímá nás pouze to rozdělení. Množin je n^{i-1}, tedy daný počet vydělíme různým počtem uspořádání množin, což je $(n^{i-1})!$. Dále nás ale nezajímá uspořádání prvků v rámci každé množiny. Prvky jedné množiny můžeme uspořádat $n!$ způsoby, a protože těchto množin máme n^{i-1}, dohromady nám to dává $(n!)^{n^{i-1}}$ způsobů. Celkově tedy dostaneme, že počet rozdělení je tak přesně ten výraz, o kterém jsme chtěli říct, že je celočíselný. Takže vyhráváme, a tím je úloha vyřešena.

Poznámky:

Všechna správná řešení se buď ubírala podobnou cestou jako to vzorové (které je ale do jisté míry trochu trikové) nebo na to šla trochu více od lesa pomocí p-valuací. Ekvivalentně totiž stačí dokázat, že p-valuace výrazu vlevo je pro libovolné prvočíslo p menší rovna p-valuaci vpravo. Při tomto postupu bylo ale mnohem snazší udělat někde při odhadech chybu a v daném lese se tak ztratit, na což některá řešení doplatila. *(Lenka Kopfová)*