Posloupnosti

1. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. ÚNORA 2024

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Vítek vzpomíná na uplynulý rok. Na tabuli by chtěl napsat posloupnost 1012 přirozených čísel se součtem 2023. Trpí však bytostnou hrůzou z čísla 3. Chce proto napsat takovou posloupnost, v níž navíc žádný úsek několika po sobě jdoucích čísel nebude mít součet 3. Poraďte mu nějakou takovou posloupnost.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Káťa si píše posloupnost přirozených čísel následovně: začne členem $a_1 = 1$ a následně vždy zvolí za a_{n+1} to nejmenší přirozené číslo takové, aby

$$\operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) > \operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Určete všechna přirozená čísla, která se v posloupnosti vyskytnou.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Áďa má posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou různých reálných čísel. Víme, že i-tý prvek této posloupnosti je obsažen v souvislé monotónní[1] podposloupnosti délky alespoň $i + 1$. Dokažte, že posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je od jistého členu monotónní.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Arcimág Radeček dostal pod stromeček nekonečnou sadu závažíček. Sada obsahuje závažíčka o kladných lichých celočíselných vahách, přičemž každé číslo je zastoupeno právě jednou. Potom si napsal posloupnost a_2, a_3, …, kde a_n je počet způsobů, jak může Radeček ze svých závažíček poskládat váhu n. Dokažte, že tato posloupnost je neklesající.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Venďa zkoumá posloupnost racionálních čísel zadanou členem $v_1 = 2024$ a předpisem

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{v_n}$$

pro všechna $n \geq 1$. Dokažte, že Venďa nedovede žádné v_n zapsat jako druhou mocninu racionálního čísla.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Rozhodněte, zdali existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pro každé přirozené n.

[1] Posloupnost je *monotónní*, pokud je celá rostoucí nebo celá klesající.

Úloha 7. (5 bodů)

Petr a Miško našli arcimágovu knihu s postupem výroby čarovné posloupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$: „Začněte s libovolnými přirozenými čísly jako prvními dvěma členy F_1, F_2, pak pro $n > 2$ počítejte a zapisujte $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$."

Petr si zvolil čísla $F_1 = 1$ a $F_2 = 2$, zatímco Miško si zvolil $F_1 = 2$, $F_2 = 1$ a pak každý popsal svojí posloupností celý svůj nekonečný pergamen. Určete, která čísla se vyskytla na obou pergamenech (ne nutně na stejné pozici v posloupnosti).

Úloha 8. (5 bodů)

Pro přirozené číslo $c > 1$ zaveďme posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí $x_1 = c$ a předpisu

$$x_{n+1} = c \cdot x_n + \sqrt{c^2 - 1} \cdot \sqrt{x_n^2 - 1}$$

pro všechna n. Dokažte, že každé x_n je celé číslo.

Posloupnosti

1. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Vítek vzpomíná na uplynulý rok. Na tabuli by chtěl napsat posloupnost 1012 *přirozených čísel se součtem* 2023. *Trpí však bytostnou hrůzou z čísla* 3. *Chce proto napsat takovou posloupnost, v níž navíc žádný úsek několika po sobě jdoucích čísel nebude mít součet* 3. *Poraďte mu nějakou takovou posloupnost.*

ŘEŠENÍ:

Podívejme se na souvislé podposloupnosti, které jsou v naší výsledné posloupnosti zapovězené, protože jejich součet je nepřístojné číslo tři. Nesmíme míti jakoukoliv podposloupnost obsahující více než dvě jedničky za sebou (pak nutně existuje podposloupnost $1, 1, 1$ se součtem 3). Dále žádná 1 nesmí sousedit s 2. A posloupnost nesmí obsahovat 3. 1 proto nemůže sousedit ani s 3.

Rozdělme si nyní naši posloupnost na 337 trojic a podposloupnost délky 1 na konci ($337 \cdot 3 + 1 = 1012$ členů). Vzhledem k omezením mohou být nejmenšími „stavebními trojicemi" pouze $1, 1, 4$, $1, 4, 1$, či $4, 1, 1$. Pokud z takovýchto trojic poskládáme naši posloupnost, dostaneme součet $(1 + 1 + 4) \cdot 337 = 2022$. Abychom dostali celkový součet 2023, musíme tedy jako poslední prvek posloupnosti dát 1. To nám ovšem vyřadí trojici $4, 1, 1$, jelikož s ní bychom měli na konci podposloupnost $1, 1, 1$, což nemůžeme. Řešení tedy máme dvě, a to $1, 1, 4, 1, 1, 4, \ldots , 1, 1, 4, 1$, kde trojice $1, 1, 4$ se opakuje 337krát, a $1, 4, 1, 1, 4, 1, \ldots , 1, 4, 1, 1$.

Ukažme si, že uvedené posloupnosti skutečně splňují podmínky ze zadání. Jejich součet je $(1 + 1 + 4) \cdot 337 + 1 = 2023$ a žádná podposloupnost nebude mít součet tři (podposloupnost délky jedna bude mít součet 1 nebo 4, podposloupnost délky dva bude mít 2 nebo 5, podposloupnost délky tři pouze 6 a podposloupnosti délek více než tři budou mít součty vyšší než 6).

POZNÁMKY:

Úložka byla lehoulinká, takže naprostá většina řešení byla úplně správně. Jediné nesrovnalosti nastaly, když si řešitelé vyložili zadání trochu jinak (podposloupnost délky 1 nezahrnovali do součtové podmínky, takže pak se jim ve výsledné posloupnosti objevovala trojka), popřípadě když za celkový součet považovali 2024, ne 2023 (což je plně intuitivní, pokud úložku řešili až v tomto roce). Za takovéto chybičky jsem bodíky nestrhávala.

Ze zcela nematematického soudku, chtěla bych vyzdvihnout řešení, které mne velmi rozveselilo kreativními pojmenováními. „Nezákonné číslo, nepřípustný a zapovězený součet, odepřené číslo" a další byly nádhernou ukázkou bohatosti češtiny. *(Anna Marie Minarovičová)*

Úloha 2.

Káťa si píše posloupnost přirozených čísel následovně: začne členem $a_1 = 1$ a následně vždy zvolí za a_{n+1} to nejmenší přirozené číslo takové, aby

$$\operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots , a_n, a_{n+1}) > \operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots , a_n).$$

Určete všechna přirozená čísla, která se v posloupnosti vyskytnou.

Řešení:

Ukážeme, že se v Kátině posloupnosti vyskytuje právě číslo 1, všechna prvočísla a všechny mocniny prvočísel.

Za a_{n+1} volíme nejmenší přirozené číslo takové, aby se jeho přidáním zvětšil nejmenší společný násobek čísel v posloupnosti. Takové a_{n+1} tedy musí mít ve svém prvočíselném rozkladu nějaké prvočíslo p ve větší mocnině, než je v libovolném předcházejícím členu posloupnosti. Jelikož hledáme nejmenší takové číslo, bude tímto číslem právě patřičná mocnina prvočísla p. V každém kroku tak přidáme do posloupnosti prvočíslo nebo jeho mocninu. Zároveň do posloupnosti každé prvočíslo i všechny jeho mocniny v nějakém kroku přidáme, jelikož tato čísla budeme postupně přidávat v pořadí podle jejich velikosti od nejmenšího z nich.

Poznámky:

Většina řešitelů se úspěšně dobrala k řešení. Někteří bohužel skončili pouze s částečným řešením – posloupností tvořenou prvočísly, posloupností tvořenou prvočísly a mocninami dvojky,... Některá řešení bohužel zaměnila vlastnost „nejmenší a_{n+1}“ za „a_{n+1} takové, že nsn se zvětší co nejméně“. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 3.

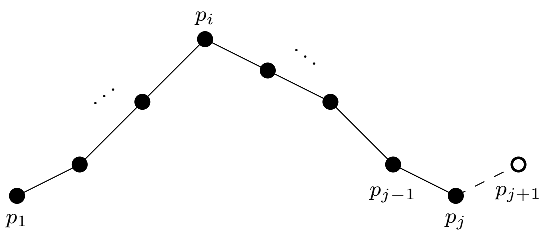
Áďa má posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou různých reálných čísel. Víme, že i-tý prvek této posloupnosti je obsažen v souvislé monotónní[1] podposloupnosti délky alespoň $i+1$. Dokažte, že posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je od jistého členu monotónní.

Řešení:

Pokud je Ádina posloupnost monotónní už od prvního členu, důkaz je hotov.

Předpokládejme dále, že existuje nějaký člen této posloupnosti p_i takový, že $p_{i-1} < p_i > p_{i+1}$ nebo $p_{i-1} > p_i < p_{i+1}$. Bez újmy na obecnosti se stačí podívat na jeden z těchto případů, druhý bude analogický.

Předpokládejme, že platí $p_{i-1} < p_i > p_{i+1}$, a podívejme se na nejmenší takové i. Aby takový případ mohl nastat, zřejmě $i \geq 2$. Podposloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{i}$ je rostoucí, tedy monotónní a obsahuje právě i členů. Prvních $i-1$ členů Ádiny posloupnosti je obsaženo v souvislé monotónní podposloupnosti požadované délky. Náš i-tý prvek musí být ale také obsažen v souvislé monotónní podposloupnosti délky alespoň $i+1$, tzn. Ádina posloupnost bude od i-tého do alespoň $2i$-tého prvku klesající.



Dále každý další prvek p_k, kde $k > i$, musí být obsažen v souvislé monotónní podposloupnosti délky alespoň $k+1$. Kdyby existoval nějaký člen Ádiny posloupnosti p_j, $j \geq 2i$ takový, že $p_{j-1} > p_j < p_{j+1}$, pak by prvek p_{j-1} musel být součástí souvislé monotónní podposloupnosti délky $j - 1 + 1 = j$, což ale jistě není, neboť je součástí monotónní podposloupnosti délky nejvýše $j - i + 1 \leq j - 2 + 1 = j - 1$ (vzhledem k $i \geq 2$). Tedy po nabytí extrému v p_i už Ádina posloupnost žádného dalšího extrému nenabyde a je od prvku p_i monotónní.

[1] Posloupnost je *monotónní*, pokud je celá rostoucí nebo celá klesající.

Poznámky:

Většina došlých řešení si s úlohou poradila správně. Několikrát jsem pouze strhla jeden bod za to, že si někdo neuvědomil, že Ádina posloupnost může být monotónní už od prvního členu.

(Jolana Štraitová)

Úloha 4.

Arcimág Radeček dostal pod stromeček nekonečnou sadu závažíček. Sada obsahuje závažíčka o kladných lichých celočíselných vahách, přičemž každé číslo je zastoupeno právě jednou. Potom si napsal posloupnost $a_2, a_3, \ldots$, kde a_n je počet způsobů, jak může Radeček ze svých závažíček poskládat váhu n. Dokažte, že tato posloupnost je neklesající.

Řešení:

Stačí nám ukázat, že $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \geq 2$. Uděláme to tak, že ke každému způsobu, jak může Radeček poskládat váhu n, přiřadíme jedinečný způsob, jak může poskládat váhu $n + 1$. Jinými slovy, sestrojíme prostou funkci z množiny způsobů, jak poskládat váhu n, do množiny způsobů, jak poskládat váhu $n+1$. Protože velikosti těchto množin jsou a_n a a_{n+1}, dokážeme tím, že $a_n \leq a_{n+1}$.

Vezměme tedy nějakou skupinku závaží, jejichž váha je dohromady n.

(1) Pokud v této skupině není závaží s váhou 1, přidáme ho, čímž se celková váha zvedne o 1.
(2) Pokud v této skupině je závaží s váhou 1, odebereme ho a navíc nejtěžší závaží nahradíme závažím o dva těžším. Tím se celková váha opět zvedne o 1.

Získali jsme způsob, jak poskládat váhu $n+1$. Nyní si rozmyslíme, že jsme uvedené operace opravdu mohli udělat. Jsou dvě omezení, jaké způsoby poskládání $n + 1$ smíme dostat, a to že každé závaží můžeme použít nejvýše jednou a že závaží mají lichou váhu.

V prvním případě předpokládáme, že ve skupince závaží hmotnosti 1 nemáme. 1 je liché číslo, tedy toto závaží můžeme přidat.

V druhém případě odebereme závaží s hmotností 1; to můžeme udělat vždy. Nyní chceme odebrat nejtěžší závaží. Protože $n \geq 2$, musí mít váhu větší než 1, a tak to můžeme udělat. Dále přidáme závaží o dva těžší, jež je těžší než všechna závažíčka v původní skupince, proto v ní určitě původně nebylo. Zároveň bude mít lichou váhu, neboť původní nejtěžší závaží mělo lichou váhu. Tedy ho můžeme přidat.

Zbývá ukázat, že každým dvěma způsobům, jak poskládat n, jsme přiřadili různé způsoby, jak poskládat $n + 1$. Ukážeme to tím, že každý způsob poskládání $n + 1$ mohl vzniknout z nejvýše jednoho způsobu poskládání n. Vezměme nějakou skupinku se součtem vah $n + 1$, nechť to jsou váhy $v_1 < v_2 < \cdots < v_k$, kde k je počet závaží.

- Pokud obsahuje 1, musel vzniknout operací (1) výše, a to ze skupinky $\{v_2, v_3 \ldots, v_k\}$.
- Pokud neobsahuje 1, mohl vzniknout jen operací (2) výše. A to ze skupinky $\{1, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k - 2\}$. Pokud $v_{k-1} = v_k - 2$, nemohl vzniknout. Ovšem pokud mohl tento způsob poskládání vzniknout, je jednoznačně určené, z jaké skupinky to bylo.

Poznámky:

Drtivá většina řešení postupovala stejně jako vzorové. Lišila se jen v míře zdůvodnění, proč uvedené řešení funguje. Protože důkaz je docela očividný, nebyla jsem v tomto směru moc přísná.

(Magdaléna Mišinová)

Úloha 5.

Venďa zkoumá posloupnost racionálních čísel zadanou členem $v_1 = 2024$ a předpisem

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{v_n}$$

pro všechna $n \geq 1$. Dokažte, že Venďa nedovede žádné v_n zapsat jako druhou mocninu racionálního čísla.

Řešení:

Začneme tím, že si v_n vyjádříme jako zlomek v základním tvaru. Nechť tedy $v_n = \frac{a_n}{b_n}$, kde a_n a b_n jsou nesoudělná. Platí, že v_n je druhá mocnina racionálního čísla právě tehdy, když a_n, b_n jsou druhé mocniny celých čísel.

Ukážeme, že pokud v_{n+1} je druhá mocnina racionálního čísla, pak i v_n je druhá mocnina racionálního čísla.

Víme, že:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{v_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{2b_n}{a_n} = \frac{a_n^2 + 2b_n^2}{a_n b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Nyní si rozmyslíme, že pokud a_n je liché a b_n sudé, pak a_{n+1} je liché a b_{n+1} je sudé. $a_n^2 + 2b_n^2$ je totiž liché a $a_n b_n$ je sudé. Zde je dobré si uvědomit, že zlomek se sice může zkrátit, ale při zkracovaní liché číslo zůstane lichým a sudé se stane lichým pouze, pokud ho zkrátíme sudým. To se ale nemůže stát.

Proto a_{n+1} je liché a b_{n+1} je sudé. Nyní se podíváme na naši posloupnost a všimneme si, že pro v_2 platí, že a_2 je liché a b_2 je sudé. Tedy pro všechny následující členy posloupnosti bude platit, že a_n je liché a b_n je sudé.

Nyní si všimneme, že pokud $\frac{a_n^2+2b_n^2}{a_n b_n}$ je zlomek v základním tvaru, pak $a_n b_n = b_{n+1}$, protože

$$\frac{a_n^2 + 2b_n^2}{a_n b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Předpokládáme, že b_{n+1} je druhá mocnina, a protože a_n a b_n jsou nesoudělné, pak i a_n a b_n jsou druhé mocniny.

Zbývá si pouze rozmyslet, že daný zlomek je opravdu v základním tvaru. b_n je určitě nesoudělné s a_n, a tedy i s $a_n^2 + 2b_n^2$. Protože a_n je liché a nesoudělné s b_n, musí být nesoudělné s $2b_n^2$, a tedy i s $a_n^2 + 2b_n^2$. Tudíž $a_n b_n$ je nesoudělné s $a_n^2 + 2b_n^2$.

Dokázali jsme, že pokud v_{n+1} je druhá mocnina racionálního čísla, pak i v_n je druhá mocnina racionálního čísla. Obměnou získáme, že pokud v_n není druhá mocnina, pak ani v_{n+1} není. Rozmyslíme si, že v_1 není druhá mocnina a ani v_2 není, pro v_2 platí, že a_2 je liché a b_2 sudé, tím pádem můžeme indukcí dokázat, že žádný prvek posloupnosti od v_2 nebude druhou mocninou racionálního čísla, tedy opravdu Venďa takové číslo nedokáže najít.

Poznámky:

Většina řešení byla správně. Některá řešení opomněla vyřešit speciální případy a bohužel přišla o nějaké bodíky.

Mnoho řešitelů se problém rozhodlo řešit pomocí p-adických valuací. Tato řešení byla většinou správně. Jenom bych poznamenal, že je dobré si dát pozor na značení. Je dobré říci, že nyní budete používat p-adickou valuaci $v_p(x)$, obzvlášť, pokud v řešení operujete s členy posloupnosti nazvanými v_n.

Někteří řešitelé se rozhodli převést rovnici na kvadratickou, následně využít diskriminantu a ukázat necelost kořenů. Tato řešení byla většinou správně, ale byla poněkud pracná.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 6.

Rozhodněte, zdali existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pro každé přirozené n.

Řešení:
Předpokládejme, že nějaká taková posloupnost existuje. Aby se jednalo o posloupnost přirozených čísel, musí platit, že součet každých dvou po sobě jdoucích členů je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Označme $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost základů těchto druhých mocnin, tedy $b_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}$. Všimněme si, že původní posloupnost a_n musí být – možná kromě prvního členu – rostoucí (protože další člen získáme přičtením něčeho kladného k předchozímu členu), a tím pádem je i posloupnost b_n od druhého členu rostoucí. Zvolme nyní $n > 1$ a podívejme se na dva po sobě jdoucí členy:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n} = a_{n+1} + b_n,$$
$$a_{n+3} = a_{n+2} + \sqrt{a_{n+2} + a_{n+1}} = a_{n+2} + b_{n+1}.$$

Sečtením těchto dvou rovností dostáváme:

$$a_{n+2} + a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2} + b_n + b_{n+1},$$
$$b_{n+2}^2 = b_{n+1}^2 + b_n + b_{n+1}.$$

Protože je posloupnost b_n pro $n > 1$ rostoucí, tak platí:

$$b_{n+1}^2 < b_{n+2}^2 = b_{n+1}^2 + b_n + b_{n+1} < b_{n+1}^2 + 2b_{n+1} + 1 = (b_{n+1} + 1)^2.$$

Tedy druhá mocnina b_{n+2}^2 musí být ostře mezi dvěma po sobě jdoucími mocninami přirozených čísel, což není možné. Dostáváme tak spor, uvažovaná posloupnost tedy nemůže existovat.

Poznámky:
Valná většina došlých řešení používala stejné myšlenky jako vzorové řešení, pouze s různými variacemi. Poznamenejme, že daný postup ukazuje, že nejenže neexistuje taková nekonečná posloupnost, ale neexistuje ani šest po sobě jdoucích členů splňujících daný rekurentní vztah. Naopak pět jich existuje (například $a_1 = 766, a_2 = 18, a_3 = 46, a_4 = 54$ a $a_5 = 64$, jak našel řešitel *Jiří Preč*), ale pokud bychom požadovali, aby byly ostře rostoucí, tak existují maximálně čtyři. Proto je také důležité se v řešení dívat na po sobě jdoucí členy někde dále v posloupnosti (stačí vynechat první člen jako ve vzorovém řešení), aby posloupnost byla rostoucí. Někteří řešitelé tuto výjimku prvního členu opomněli, následné uvažování pouze prvních pěti členů posloupnosti pak nevedlo ke sporu.

(Lenka Kopfová)

Úloha 7.

Petr a Miško našli arcimágovu knihu s postupem výroby čarovné posloupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$: „Začněte s libovolnými přirozenými čísly jako prvními dvěma členy F_1, F_2, pak pro $n > 2$ počítejte a zapisujte $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.“

Petr si zvolil čísla $F_1 = 1$ a $F_2 = 2$, zatímco Miško si zvolil $F_1 = 2$, $F_2 = 1$ a pak každý popsal svojí posloupností celý svůj nekonečný pergamen. Určete, která čísla se vyskytla na obou pergamenech (ne nutně na stejné pozici v posloupnosti).

Řešení:

Označme si Petrovu posloupnost jako $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ a Miškovu jako $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rozepišme si prvních pár členů posloupností:

$$P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 3, P_4 = 5, P_5 = 8, P_6 = 13,$$

$$M_1 = 2, M_2 = 1, M_3 = 3, M_4 = 4, M_5 = 7, M_6 = 11.$$

Povšimněme si, že $M_5 = P_5 - P_1$ a $M_6 = P_6 - P_2$. Nyní indukcí dokážeme, že pro každé $n > 4$ platí $M_n = P_n - P_{n-4}$. Základní krok máme výše. Nechť tedy tvrzení platí pro $n-1$ a $n-2$, pak můžeme upravovat:

$$M_n = M_{n-1}+M_{n-2} = P_{n-1}-P_{n-5}+P_{n-2}-P_{n-6} = P_{n-1}+P_{n-2}-(P_{n-5}+P_{n-6}) = P_n-P_{n-4},$$

čímž je indukce dokončena.

Dále víme, že $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ pro všechna $n > 2$, můžeme tedy výše zmíněný výraz upravit jako:

$$M_n = P_n - P_{n-4} = P_{n-1} + P_{n-2} - P_{n-4} = P_{n-1} + P_{n-3} + P_{n-4} - P_{n-4} = P_{n-1} + P_{n-3}.$$

Poznamenejme nyní, že jelikož pro $n > 2$ je n-tý člen obou posloupností vždy větší než oba předchozí (neboť se jedná o posloupnosti přirozených čísel a člen je vyjádřen jako jejich součet), jsou od třetího členu jistě obě rostoucí (ostře).

Pro $n > 4$ z výše zmíněných výpočtů platí:

$$M_n = P_n - P_{n-4} < P_n,$$

neboť všechny členy jsou přirozené (vždy je lze získat jako součet dvou přirozených čísel), a zároveň

$$M_n = P_{n-1} + P_{n-3} > P_{n-1}.$$

Tím získáváme, že pro každé $n > 4$ je $P_{n-1} < M_n < P_n$. A vzhledem k tomu, že je posloupnost P rostoucí už od prvního členu, nenajdeme žádný její prvek, který by se rovnal prvku M_n. Dvě nerovnosti zjevně platí i pro $n = 4$, zbývají nám tedy ošetřit první tři hodnoty Miškovy posloupnosti, které se však, jak je vidět z rozepsání několika členů, v Petrově posloupnosti vyskytují.

Na obou pergamenech se tedy vyskytují právě čísla 1, 2, 3.

Poznámky:

Většina řešitelů se ubírala tímto směrem a více či méně elegantně dospěla ke správnému řešení. Někteří další k vyjadřování konkrétních členů využívali explicitní vzorce pro prvky Fibonacciho posloupnosti, což typicky bylo mnohem méně elegantní (a hůř opravovatelné) a občas se nedopočítali ke správnému řešení. Za neúplné číselné řešení (tedy neuvedení všech tří čísel) jsem strhávala jeden bod.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 8.

Pro přirozené číslo $c > 1$ zaveďme posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí $x_1 = c$ a předpisu

$$x_{n+1} = c \cdot x_n + \sqrt{c^2 - 1} \cdot \sqrt{x_n^2 - 1}$$

pro všechna n. Dokažte, že každé x_n je celé číslo.

Řešení:
Nejprve ukážeme, že všechny body (x_n, x_{n+1}) splňují kvadratickou rovnici definovanou pouze pomocí c. K tomu upravme rekurentní vztah:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - cx_n &= \sqrt{c^2 - 1} \cdot \sqrt{x_n^2 - 1}, \\
x_{n+1}^2 - 2cx_n x_{n+1} + c^2 x_n^2 &= (c^2 - 1)(x_n^2 - 1) = c^2 x_n^2 - x_n^2 - c^2 + 1, \\
x_{n+1}^2 - 2cx_n x_{n+1} + x_n^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Každá dvojice (x_{n+1}, x_n) je tedy řešením rovnice $x^2 - 2cxy + y^2 - 1 = 0$. Rovnice je navíc symetrická vůči prohození x a y, čili spolu s dvojicí (x_{n+1}, x_n) je řešením také (x_n, x_{n+1}).

S touto rovnicí už můžeme dokázat, že všechna x_n jsou celá čísla. Pro $n = 1$ to platí okamžitě, zatímco pro $n = 2$ dostaneme

$$x_2 = c \cdot c + \sqrt{c^2 - 1} \cdot \sqrt{c^2 - 1} = 2c^2 - 1,$$

což je taktéž celé. Dále už postupujme indukcí. Víme, že body (x_n, x_{n-1}) a (x_n, x_{n+1}) splňují kvadratickou rovnici, a předpokládáme, že x_n i x_{n-1} jsou celá čísla. Můžeme tedy uvažovat, že x_{n-1} a x_{n+1} jsou kořeny kvadratické rovnice

$$y^2 - 2cx_n y + x_n^2 - 1 = 0$$

v proměnné y. Z Viètových vztahů pak tyto dva kořeny musí splňovat $x_{n-1} + x_{n+1} = 2cx_n$. Jelikož c, x_n i x_{n-1} jsou celá čísla, musí nyní být celé i $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$.

Tím je hotový indukční krok, takže skutečně všechna x_n budou celá.

Alternativní řešení (volně podle Erika Ježka):
Tipneme si a dokážeme z nebe spadlý explicitní předpis pro členy naší posloupnosti:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^n + \left(c - \sqrt{c^2 - 1}\right)^n\right). \qquad (*)$$

Ještě než jej dokážeme, nahlédneme, proč tím bude úloha vyřešena. Z binomické věty můžeme rozvinout

$$\left(c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^n = c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}\sqrt{c^2 - 1} + \binom{n}{2}c^{n-2}(c^2 - 1) + \binom{n}{3}c^{n-3}(c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 1} + \cdots$$

V tomto součtu se střídají celá čísla s celočíselnými násobky $\sqrt{c^2 - 1}$. Stejně můžeme rozepsat

$$\left(c - \sqrt{c^2 - 1}\right)^n = c^n - \binom{n}{1}c^{n-1}\sqrt{c^2 - 1} + \binom{n}{2}c^{n-2}(c^2 - 1) - \binom{n}{3}c^{n-3}(c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 1} + \cdots$$

Jediným rozdílem je, že členy s odmocninami $\sqrt{c^2 - 1}$ dostanou záporné znaménko. Z toho ale plyne, že sečtením těchto dvou výrazů a vydělením dvěma nám zcela zmizí členy s odmocninami a zůstanou pouze ty, kterou jsou očividně celočíselné. Tudíž podle $(*)$ bude x_n vždy celočíselné.

Zbývá tedy dokázat, že platí předpis $(*)$. To uděláme indukcí podle n. Jako základní případ pro $n=1$ máme

$$\frac{1}{2}\left(\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)+\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot 2c=c=x_1.$$

Dále ať $(*)$ platí pro n a dokažme jej pro $n+1$. Díky $\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)\cdot\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)=1$ dostaneme

$$\begin{aligned} x_n^2-1&=\frac{1}{4}\left(\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)^{2n}+2+\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^{2n}\right)-1=\\ &=\frac{1}{4}\left(\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)^{2n}-2+\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^{2n}\right)=\\ &=\left(\frac{1}{2}\left(\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)^{n}-\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^{n}\right)\right)^2,\end{aligned}$$

z čehož už upravíme

$$\begin{aligned} 2x_{n+1}&=c\cdot 2x_n+\sqrt{c^2-1}\cdot 2\sqrt{x_n^2-1}=\\ &=c\left(\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)^n+\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^n\right)+\sqrt{c^2-1}\left(\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)^n-\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^n\right)=\\ &=\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)^n+\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^n=\\ &=\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)^{n+1}+\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

což přesně znamená, že $(*)$ platí i pro $n+1$. Důkaz indukcí je tak hotov, díky čemuž je hotové i celé řešení.

Poznámky:
Většina odevzdaných řešení byla správně a postupovala nějakou formou indukce dedukující celočíselnost x_{n+1} z celočíselnosti x_n a x_{n-1}. Pár řešitelů si všimlo souvislosti s tzv. Čebyševovými polynomy; další souvislostí, která se v úloze dá vidět a která je nepřímo obsažena v alternativním řešení ukázaném výše, je, že x_n jsou jen x-ové souřadnice v řešeních Pellovy[2] rovnice $x^2-(c^2-1)y^2=1$.

(Matěj Doležálek)

[2] O Pellově rovnici se lze dozvědět víc třeba zde: *https://prase.cz//library/PellMD/PellMD.pdf.*