Finální myš-maš

4. jarní série Termín odeslání: 15. května 2023

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

(a) Vašek má doma lustr s 25 žárovkami. Jedna z nich je uprostřed lustru, zbylé tvoří pravidelný 24-úhelník na jeho obvodu. Duch Rado se rozhodl Vaška postrašit, a tak některé žárovky zhasl a některé rozsvítil. Vašek má vypínače, pomocí nichž může provádět následující:

(1) Buď vybere některé dvě žárovky na obvodu, které mezi sebou mají lichý počet žárovek, a změní stav těchto dvou žárovek a také stav žárovky uprostřed.
(2) Nebo vezme tři žárovky na obvodu, které tvoří rovnostranný trojúhelník, a změní jejich stav a také stav žárovky uprostřed.

Dokažte, že ať původně Rado žárovky nastavil jakkoliv, může Vašek dosáhnout toho, aby byly všechny žárovky na lustru rozsvícené. (2 body)

(b) Upír Marian má rakev tvaru lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD. Budiž E průsečíkem jeho úhlopříček, dále jako G označme průsečík výšek trojúhelníku BCE a jako H označme průsečík výšek trojúhelníku ADE. Dokažte, že přímka procházející středem úsečky GH a bodem E je kolmá na přímku AB. (3 body)

Úloha 2.

(a) Žabák Dláža se nachází ve vnitřním bodě úsečky AB různém od jejího středu. Když říkáme, že Dláža *přeskočí* nějaký bod X, znamená to, že se z bodu D přesune do bodu D', který leží na polopřímce opačné k XD a splňuje $|XD'| = \frac{1}{2}|XD|$. Dláža si každou minutu vybere jeden z bodů A, B a přeskočí jej. Rozhodněte, zdali se dovede v konečném čase dostat do středu úsečky AB.
(2 body)

(b) V trojúhelníku ABC jsou D, E, F paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C. Označme kružnici opsanou AEF jako Γ. Kružnice ω_1 se dotýká Γ v bodě E a prochází bodem D, analogicky se kružnice ω_2 dotýká Γ v bodě F a prochází bodem D. Druhým průsečíkem ω_1 s ω_2 je bod P různý od D. Dokažte, že body B, C, P leží na jedné přímce. (3 body)

Úloha 3.

(a) Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $3^p + 4^q$ je druhou mocninou přirozeného čísla. (2 body)

(b) Jsou dána prvočísla p_1, p_2. Další členy posloupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány tak, že p_n je největší prvočíselný dělitel čísla $p_{n-1} + p_{n-2} + 2022$. Dokažte, že ať už jsou p_1, p_2 zvolena jakkoliv, umíme najít reálné číslo C takové, že $p_n \leq C$ pro všechna n. (3 body)

Úloha 4.

(a) Daník rozmístil čísla 1, 2, …, 8 do vrcholů krychle. Potom na každou hranu napsal součet čísel ve vrcholech, jež spojuje. Rozhodněte, zdali mohl čísla do vrcholů rozmístit tak, aby byly součty na hranách navzájem různé. (2 body)

(b) Na Matfyzu studuje n matematiků, n fyziků a n informatiků. Každý Matfyzák má alespoň $n+1$ kamarádů[1] mezi Matfyzáky z jiného oboru než svého. Dokažte, že můžeme zvolit jednoho matematika, jednoho fyzika a jednoho informatika, kteří jsou navzájem kamarádi. (3 BODY)

ÚLOHA 5.

(a) Je dáno přirozené číslo n. Najděte n-prvkovou množinu S přirozených čísel takovou, že její prvky jsou po dvou nesoudělné a pro každou neprázdnou podmnožinu $A \subseteq S$ je aritmetický průměr prvků A celé číslo. (2 BODY)

(b) V PraSestánu se nachází n měst, z nichž některá jsou spojena obousměrnou leteckou linkou společnosti PraSér, přičemž se lze letecky dopravit mezi libovolnými dvěma městy. PraSér má ve městě M pobočku, právě pokud z něj vede ostře více linek, než je aritmetický průměr počtů linek vedoucích ze všech měst spojených leteckou linkou s M. Určete, kolik nejvíce poboček může PraSér pro dané n mít. (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Natka našla přirozené číslo $a > 1$ zapsané v desítkové soustavě bez přebytečných nul na začátku. Poté jej napsala dvakrát za sebou a vzniklé číslo s dvojnásobným počtem cifer označila jako b. S překvapením zjistila, že b je násobkem a^2. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat zlomek $\frac{b}{a^2}$. (2 BODY)

(b) Michal dostal čtverec papíru $ABCD$ a přehnul ho podle přímky ℓ tak, aby se vrchol A přesunul na bod A' na úsečce BC. Označme E průsečík přímky ℓ se stranou AB a F průsečík ℓ se stranou CD. Vrchol D se přehnutím přesunul do bodu D'. Průsečík $A'D'$ a CD označme jako H. Ukažte, že součet obvodů trojúhelníků EBA' a $D'FH$ je roven obvodu trojúhelníku $A'CH$. (3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Jsou dána reálná čísla a, b, c, d a kvadratické funkce f, g splňující

$$\begin{array}{llll} f(a)=2, & f(b)=3, & f(c)=7, & f(d)=10, \\ g(a)=16, & g(b)=15, & g(c)=11. & \end{array}$$

Určete všechny možné hodnoty $g(d)$. (2 BODY)

(b) Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\} \to \mathbb{R}$, jež pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ splňují

$$f(x)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x.$$

(3 BODY)

[1] Kamarádství je symetrické.