

# Kombinatorická geometrie 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

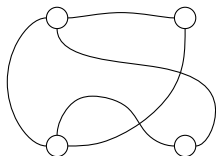
TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. DUBNA 2023

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)  
Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo  $k$  a množina  $2k$  bodů v rovině, pro kterou neexistuje  $\frac{1}{2}$ -středobod.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)  
Mějme graf  $G = (V, E)$  a jeho nakreslení. Pro libovolnou hranu  $e \in E$  označme  $\text{cr}(e)$  počet hran, které  $e$  v daném nakreslení protíná. Dokažte, že

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \text{cr}(e)} \leq 3|V| - 6.$$

Příklad této nerovnosti ukazuje následující obrázek:



$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq 6$$

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)  
Pro množinu bodů  $S$  v rovině označme  $\Delta(S)$  počet nedegenerovaných trojúhelníků s vrcholy z množiny  $S$  a obvodem 1. Dále označme  $\Delta_{\max}(n)$  maximální hodnotu  $\Delta(S)$  přes všechny možné  $n$ -prvkové množiny  $S$ . Dokažte, že  $\Delta_{\max} \in \mathcal{O}(n^{7/3})$ .