

# Prvočísla

3. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. PROSINCE 2022

*Prvočíslem rozumíme přirozené číslo větší než jedna, které je dělitelné jen jedničkou a sebou samým.*

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Dvojka slaví narozeniny a na oslavu si pozvala prvních osm lichých prvočísel (tedy 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 a 23). Pomozte dvojce rozesadit všech osm hostů okolo kulatého stolu tak, aby byl rozdíl každých dvou sousedních čísel celočíselnou mocninou dvojky.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Žirafa přinesla Michalovi přirozené číslo  $n \geq 3$ . Michal si poté pro všechna lichá prvočísla  $p \leq n$  zapsal číslo  $n - p$  a zjistil, že mu vychází samá prvočísla. Určete, která  $n$  mu mohla žirafa přinést.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Ben, Peťo a Zdeněk si každý mysleli prvočíslu. Zjistili, že součin jejich myšlených čísel je devatenáctkrát větší než jejich součet. Určete, jaké všechny trojice prvočísel mohli mít na mysli.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Nalezněte všechny trojice prvočísel  $p, q, r$  takové, že  $p^4 + q^4 + r^4 - 3$  je také prvočíslu.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Matouš vyrábí posloupnost přirozených čísel. Jako počáteční člen zvolí nějaké přirozené  $a_1 \geq 2$  a poté opakuje následující kroky: jako  $p_n$  označí nejmenšího prvočíselného dělitele čísla  $a_n$  a následně spočte  $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{p_n}$ . Dokažte, že ať už Matouš zvolil  $a_1$  jakkoliv, od nějakého indexu  $K$  budou všechna  $n \geq K$  splňovat  $a_{n+3} = 3a_n$ .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Určete, pro která prvočísla  $p$  jsou  $\frac{p+1}{2}$  i  $\frac{p^2+1}{2}$  druhé mocniny celých čísel.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Venda našla prvočíslu  $p$  a přirozené číslo  $n \geq 2$  taková, že  $p - 1$  je násobkem  $n$  a zároveň je  $n^6 - 1$  násobkem  $p$ . Dokažte, že alespoň jedno z čísel  $p - n$  a  $p + n$  muselo být druhou mocninou celého čísla.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Buď  $p$  prvočíslu. Dokažte, že součin<sup>1</sup>

$$\prod_{k=1}^{p-1} k^{2k-p-1}$$

je přirozené číslo.

---

<sup>1</sup>Symbolem  $\prod$  značíme součin, například  $\prod_{k=1}^5 (2k+1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$ .