

# Funkce

3. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. DUBNA 2023

Funkce  $f : A \rightarrow B$  přiřazuje každému prvku  $a \in A$  nějaký prvek  $f(a) \in B$ .

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Klátra, Lenka, Majda a Natka mají každá svoji oblíbenou funkci, která každému z čísel 1, 2, 3, 4 přiřazuje reálné číslo.

- Klátra řekla Lence: „Tož, moje funkce je lepší než ta tvoje! Našla jsem tři různá čísla z množiny  $\{1, 2, 3, 4\}$ , ve kterých je moje funkce větší než ta tvoje.“
- Na to Lenka odvětila: „To je sice pravda, ale ta moje je ve třech různých číslech větší než ta Majdina“.
- Majda se ohradila: „Já by mohla říct to stejné o Natčině funkci.“
- Načež Natka prohlásila: „A já tiež o tej Klátrinej.“

Mohly mít opravdu všechny dívky pravdu?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Matěj našel funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  splňuje  $f(2023 - x) = f(2023 + x)$ . Číslo  $k$  nazveme *kořen*, pokud  $f(k) = 0$ . Matějova funkce má právě 2023 různých reálných kořenů. Určete jejich součet.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  splňuje  $f(x) = 1$  pro celočíselná  $x$  a  $f(x) = 0$  pro  $x$ , která nejsou celá. Napište předpis funkce  $f$  využívající pouze proměnnou  $x$ , celá čísla, operace  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$  (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a funkci dolní celá část<sup>1</sup>.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Pro reálná čísla  $a$  a  $b$  platí, že oba kvadratické polynomy  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + bx + a$  mají každý dva různé reálné kořeny. Dále má součin těchto polynomů právě tři různé reálné kořeny. Najděte součet těchto tří kořenů.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Najděte všechny funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , které pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  splňují

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y).$$

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Najděte všechny funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , jež pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  splňují

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2.$$

---

<sup>1</sup>Dolní celá část  $[x]$  reálného čísla  $x$  je největší celé číslo nepřevyšující  $x$ .

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Najděte všechny funkce  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , které pro všechna  $a, b \in \mathbb{N}$  splňují rovnost

$$\underbrace{f(f(\dots f(a)\dots))}_{f(b)\text{-krát}} + ab = f(a)f(b).$$

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Rozhodněte, zda existuje funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $f(f(x)) = x^2 - x - 2023$  pro všechna reálná  $x$ .