Kombinatorická geometrie 2

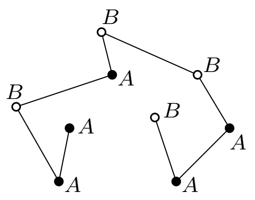
2. SERIÁLOVÁ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. ÚNORA 2023

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Fíla tvrdí, že v rovině nalezl konvexní množinu A s následující vlastností: pro jakékoli přirozené n lze k A přidat právě n různých bodů neležících v A tak, aby i po přidání těchto bodů zůstala konvexní. Rozhodněte, zda skutečně existuje množina s touto vlastností, nebo to Fíla popletl.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

V rovině leží dvě disjunktní konečné množiny bodů A a B, přičemž sjednocení A a B tvoří množinu bodů v obecné poloze. Majda nakreslila neprotínající se lomenou čáru[1] s vrcholy právě v bodech množin A a B. Potom se podívala, v jakém pořadí čára procházela body množin A a B: za každý bod množiny A si zapsala „A“ a za každý bod množiny B si zapsala „B“. Dokažte, že ať už byly body rozmístěny jakkoliv, dovedla Majda nakreslit lomenou čáru tak, aby se v jejím zapsaném textu nikde neobjevily řetězce „ABA“ ani „BAB“.



$AABABBAAB$

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Mějme konvexní mnohostěn A v prostoru. Pepa by rád zvolil bod O uvnitř A tak, aby platilo, že kdykoliv přímka procházející bodem O protíná hranici mnohostěnu A v bodech X, Y, pak je splněna nerovnost

$$\frac{1}{3} \leq \frac{|OX|}{|OY|} \leq 3.$$

Dokažte, že Pepa takový bod vždy dovede najít.

[1] *Lomená čára* je tvořena několika na sebe navazujícími úsečkami. *Vrcholy* lomené čáry rozumíme koncové body úseček, které ji tvoří.