Na jedné přímce

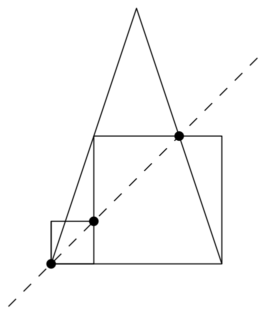
2. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 14. LISTOPADU 2022

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Petr nakreslil úsečku délky 9 a její krajní body obarvil růžově. Obarvěte růžově právě tři další body na Petrově úsečce tak, aby pro každou vzdálenost 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 existovaly dva růžové body s touto vzdáleností.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Čtverce $BXYZ$ a $XCPQ$ leží ve stejné polorovině vůči BC jako bod A. Navíc X leží na úsečce BC, Q leží na úsečce AB a Y leží na úsečce QX. Průsečík PQ a AC označíme K. Dokažte, že body B, Y a K leží na jedné přímce.



ÚLOHA 3. (3 BODY)

Zdeněk vzal pastelky a každý z bodů $1, 2, \ldots, 2022$ na číselné ose obarvil buď modře, nebo červeně. Úsečku spojující dva z obarvených bodů nazveme *modrou*, pokud jsou oba její krajní body modré, *červenou*, pokud jsou oba červené, a *fialovou*, pokud je jeden modrý a jeden červený. Mohl Zdeněk obarvit body tak, aby součet délek fialových úseček byl stejný jako součet délek modrých a červených úseček dohromady?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

V každém nezáporném celočíselném bodě na číselné ose roste strom. Na stromech roste celkem 2022 hrušek, přičemž na jednom stromě může růst vícero hrušek, nicméně průměrná vzdálenost hrušek od nuly je 2022. Šimon si chce postavit na číselné ose chatrč tak, aby součet vzdáleností chatrče od hrušek byl nejmenší možný. Uvažujeme-li všechna vyhovující rozmístění hrušek, kde nejdál od nuly může Šimonova chatrč stát?

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Jsou dány obdélníky $ABCD$ a $AEFG$, přičemž platí, že body B, D, E a G leží na jedné přímce, navíc bod G leží uvnitř obdélníku $ABCD$ a bod B uvnitř $AEFG$. Průsečík CD a EF označme P. Průsečík BC a FG označme Q. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce.

Úloha 6. (5 bodů)

Trojúhelník ABC má kružnici opsanou ω se středem O. Kolmice k BC procházející bodem A protíná BC v bodě D a ω v bodě E různém od A. Dokažte, že středy úseček AC, BE a DO leží na jedné přímce.

Úloha 7. (5 bodů)

V trojúhelníku ABC má úhel u vrcholu A velikost $60°$. Uvažujme bod D uvnitř úsečky BC. Středy kružnic opsaných ABD a ACD postupně označíme O_1 a O_2. Průsečík BO_1 a CO_2 označíme M. Střed kružnice opsané DO_1O_2 označíme N. Dokažte, že existuje pevný bod X takový, že pro každou polohu D na úsečce BC leží body M, N a X na jedné přímce.

Úloha 8. (5 bodů)

Je dán ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC, jehož kružnice opsaná ω má střed O. Označme A_0 střed strany BC a nechť přímka AA_0 protíná ω v bodě A_1 různém od A. Nakonec jako X_A označme průsečík tečny k ω v bodě A_1 a kolmice k AO procházející bodem A_0. Analogicky zkonstruujeme X_B a X_C. Dokažte, že body X_A, X_B, X_C leží na jedné přímce.