

# Čtverce

2. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. BŘEZNA 2023

*Čtvercem rozumíme číslo, které je druhou mocninou přirozeného čísla.*

ÚLOHA 1. (3 BODY)  
Je dáno číslo  $N = 1234567891011121314151617181920$ . Rozhodněte, zda je možno přeuspořádat číslice  $N$  tak, aby vznikl čtverec.<sup>1</sup>

ÚLOHA 2. (3 BODY)  
Vašek má přirozené číslo  $n$  a zjistil, že  $2n + 1$  je čtverec. Ukažte, že potom lze  $n + 1$  vyjádřit jako součet dvou čtverců.

ÚLOHA 3. (3 BODY)  
Hedvika dostala k narozeninám čtvercový dort o straně délky 10, který rozkrájela 100 řezy na 100 dílků. Každý řez je rovný, začíná přesně ve středu dortu a končí někde na jeho obvodu. Shodou okolností se přihodilo, že každý z dílků má stejný obvod  $o$ . Dokažte, že platí  $10\sqrt{2} \leq o \leq 15$ .

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)  
Jsou dána přirozená čísla  $x, y, z$  taková, že  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$  a  $\text{NSD}(x, y, z) = 1$ . Dokažte, že  $x + y$  je čtverec.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)  
Kua chová své PraSátko, které se pohybuje rychlostí 2 km/h, ve čtvercové ohradě, kde jej hlídají čtyři víly. Víly se umí pohybovat pouze po obvodu ohrady, ale zato rychlostí až 3 km/h. Na začátku stojí v každém rohu ohrady jedna víla, zatímco PraSátko startuje přesně uprostřed ohrady. Chtělo by se dostat ke kraji ohrady a prorazit ven, ale nemůže tak učinit v bodě, kde se zrovna nachází alespoň dvě víly. Rozhodněte, zda pro víly existuje strategie, která zajistí, aby PraSátko nikdy nedovedlo utéct, ať už běhá jakkoliv.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)  
Na straně  $AD$  čtverce  $ABCD$  zvolíme bod  $X$ . Kružnice vepsaná trojúhelníku  $ABX$  se dotýká stran  $AX, BX$  po řadě v bodech  $K, L$ . Dokažte, že přímka  $KL$  prochází pevným bodem nezávislým na volbě bodu  $X$ .

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)  
Najděte všechny funkce  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $n^3$  násobkem  $f(n)$  a zároveň je  $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$  čtverec.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)  
V rovině je dána mřížka tvořená  $n \times n$  body, kde  $n \geq 2$ . Marian by chtěl nakreslit lomenou čáru<sup>2</sup> procházející všemi body této mřížky. Kolik nejméně úseček musí takovou lomenou čáru tvořit?

<sup>1</sup>Je povoleno číslice přeuspořádat i tak, aby výsledek začínal nulami.

<sup>2</sup>Lomená čára je tvořena několika na sebe navazujícími úsečkami.