

Strašidla

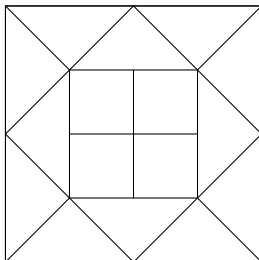
1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 10. ŘÍJNA 2022

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Čarodějnice Klárka rozlámala čtvercovou tabulku čokolády o délce strany 1 na 12 shodných trojúhelníků a 4 shodné čtverce jako na obrázku. Určete obsahy jednotlivých dílků.



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Vodník Pepa chce rozmístit svých šest hrníčků s dušičkami na rovném dně rybníka tak, aby každé tři z nich tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníku. Najděte způsob, jak toho může docílit.

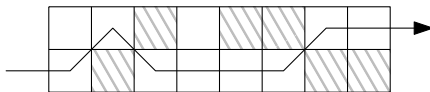
ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Hrobař Radeček je hrdým správcem obdélníkového hřbitova, na němž je rozmístěno 2×8 čtvercových hrobů. Každou noc o půlnoci chodí od jedné z kratších hřbitovných zdí k té druhé, přičemž vždy může vstoupit pouze na hrob, který s tím, na němž zrovna stojí, sousedí stranou nebo vrcholem.

Radečkův hřbitov však není jen tak ledajaký – v každém hrobu dřímá jeden upír. Při každém úplňku se nějaká skupinka upírů rozhodne, že při soumraku otevřou své hroby a vydají se trýznit smrtelníky. S úsvitem se pak všichni upíři vrátí do svých hrobů a opět je zavřou.

Radeček se při svých nočních obchůzkách neodvažuje vkročit na otevřený hrob. Určete, pro kolik různých skupinek upírů, kteří vylezou z hrobů, ještě Radeček zvládne projít hřbitovem. Na obrázku je příklad jedné situace, kde šrafované čtverečky značí otevřené hroby, mezi nimiž Radeček dovede projít.



ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Bílá paní Hedvika strašila několik nocí na hradě, bezhlavý rytíř Daník strašil o sto nocí víc než Hedvika. Zjistili, že počet nocí, kdy strašila Hedvika, je kladný a má lichý počet dělitelů. Totéž platí o počtu nocí, kdy strašil Daník. Zjistěte, kolik nocí mohla Hedvika strašit (a dokažte, že to jsou všechny možnosti).

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Vlkodlak Fíla sežral kladná celá čísla x, y, n splňující rovnost $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$. Dokažte, že existuje celé číslo $a > 1$, jehož druhá mocnina dělí číslo n .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Na šachovnici 12×12 se sešlo několik gorgon se zavřenýma očima, přičemž každá stojí na jiném políčku. Gorgona může vidět právě gorgony stojící ve stejném řádku nebo sloupci (i pokud mezi nimi stojí další gorgony). Pokud dvě gorgony otevřou oči a navzájem se vidí, obě zkamení. Zjistěte, kolik nejméně gorgon se na šachovnici musí sejít, abychom nehlédě na jejich rozestavení vždy mohli vybrat sedm z nich, které mohou všechny naráz otevřít oči a nez kamenět. Nezapomeňte také ukázat, že menší počet gorgon nestačí.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Tajemný hrad Rypák má hradby ve tvaru kružnice a sochu, která leží v nějakém bodě uvnitř této kružnice. Duchové Marian a Michal si každý večer vyberou dvě tětivy kružnice, po nichž budou poletovat a strašit návštěvníky hradu. Vždy však vybírají takové tětivy, které jsou navzájem kolmé a protínají se přesně v soše. Dokažte, že součet druhých mocnin délek těchto tětív je vždy stejný, nehlédě na to, kterou konkrétní dvojici tětív si Marian s Michalem vyberou.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Majda se snaží vyvolat TeMné VelePraSe podle příručky černé magie, kterou našla v knihovně. Už má na zemi nakreslenou kružnici, jejíž každý bod je obarven jednou z 2022 barev. Další krok obřadu vyžaduje, aby našla lichoběžník, jehož vrcholy leží na této kružnici a mají všechny stejnou barvu. Dokažte, že se jí to může vždy podařit bez ohledu na to, jak jsou body kružnice obarveny.