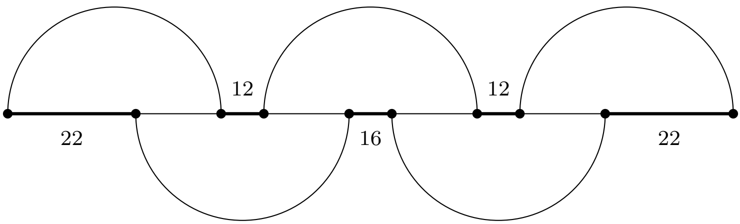
Průměry

1. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. ÚNORA 2023

Jsou-li dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, potom jako jejich aritmetický průměr označujeme číslo $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ navíc kladná, pak jako jejich geometrický průměr označujeme číslo $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Pět shodných půlkružnic s průměrem d je přiloženo na přímku tak, jak ukazuje obrázek. Určete d, znáte-li délky úseček zvýrazněných na obrázku. (Obrázek je pouze orientační a nezobrazuje přesné délky.)



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Je dáno přirozené číslo n. Určete geometrický průměr jeho kladných dělitelů.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 2023$. Radek může v jednom kroku smazat dvě čísla a místo nich napsat jejich aritmetický průměr. Může postupovat tak, aby nakonec zbylo na tabuli jako jediné číslo 2? A může postupovat tak, aby nakonec zbylo číslo 1000?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Řekneme, že neprázdná konečná množina přirozených čísel je *sladká*, je-li aritmetický průměr jejích prvků celočíselný. Pro přirozené číslo n označme jako s_n počet všech sladkých podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že $s_n - n$ je sudé číslo.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je permutace čísel od 1 do n. Dvojici indexů $i < j$ nazveme *veselou*, pokud aritmetický průměr čísel a_i a a_j není roven žádnému a_k pro k splňující $i < k < j$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje permutace, v níž je každá dvojice indexů $i < j$ veselá.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Jsou dána reálná čísla x, y, z taková, že $1 \neq x \neq y \neq 1$, a označíme

$$a_1 = \frac{yz - x^2}{1 - x}, \qquad a_2 = \frac{xz - y^2}{1 - y}, \qquad a_3 = x + y + z.$$

Víte-li navíc, že $a_1 = a_2$, určete hodnotu $\frac{A(a_1,a_2,a_3)}{A(x,y,z)}$, kde $A(k, \ell, m)$ značí aritmetický průměr čísel k, ℓ, m.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Diana dostala posloupnost celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ a rozhodla se, že ji postupně prodlouží na nekonečnou posloupnost: V každém kroku uváží svou dosavadní posloupnost $a_1, \ldots, a_n$ a zvolí nejmenší přirozené číslo $m \leq n$ takové, že aritmetický průměr čísel $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ je celočíselný. Následně za a_{n+1} zvolí tento aritmetický průměr. Dokažte, že od nějakého indexu t už budou všechna a_i pro $i \geq t$ stejná.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Trojici reálných čísel $a < b < c$ označíme jako *pěknou*, je-li b aritmetickým průměrem a a c. Anička obdržela $2k + 1$ různých reálných čísel, mezi nimiž nalezla alespoň k^2 pěkných trojic. Dokažte, že dovede tato reálná čísla rozdělit na dvě disjunktní aritmetické posloupnosti.