Kombinatorická geometrie III – Mnoho průsečíků

Milý příteli,
ve třetím díle naší cesty kombinatorickou geometrií se ze začátku ještě vrátíme ke konvexním množinám a ukážeme si příklad využití Hellyho věty. Potom už se budeme věnovat průsečíkům z názvu tohoto dílu. Definujeme si grafy a budeme zkoumat, jak se jejich hrany (ne)protínají, když si je nakreslíme do roviny. Pokud nevíš, co to takový graf je, ničeho se neboj, vše si vysvětlíme. Zamyslíme se nad tím, jak se některé jevy chovají, když máme objektů mnoho. Například je jasné, že když v rovině vyznačíme dva body a dvě přímky, existují nejvýše tři dvojice (B, p), kde B je bod a p přímka taková, že na ní B leží. Jak to ale dopadne, když budeme mít tisíc přímek a tisíc bodů? Nebo milion přímek a milion bodů? To se dozvíš na samém konci seriálu.

Přejeme příjemné čtení a mnoho zdaru při řešení soutěžních úloh.

Pepa a Majda

Středobody

Možná už jsi někdy slyšel(a) pojem *medián*, třeba v kontextu statistiky. Například se typicky uvádí medián mezd místo jejich průměru. Medián obvykle znamená prostřední hodnota z několika čísel. Naše definice se možná bude trochu lišit od té, na kterou jsi zvyklý (zvyklá), ale uvidíš, že to není moc velký rozdíl.

Definice. Nechť X je konečná množina reálných čísel. O reálném čísle m řekneme, že je *medián* množiny X, jestliže je aspoň polovina čísel v X větší nebo rovna m a aspoň polovina čísel v X je menší nebo rovna m.

Všimni si, že medián množiny X nemusí nutně být prvkem X. Mediánem množiny $\{-22.7, \pi, 42\}$ je π. Naopak medián množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ není jednoznačně určen, mediánem je libovolné číslo z uzavřeného intervalu $\langle 2, 3\rangle$, tedy třeba 2, $\sqrt{5}$ nebo e. Tohle je rozdíl oproti obvyklejší definici mediánu, kdy by při sudé velikosti množiny byl mediánem průměr prostředních dvou čísel (pro množinu $\{1, 2, 3, 4\}$ by tedy medián byl pouze 2.5). Čísla jsou vlastně body na reálné ose. My se budeme ale zabývat body i ve více rozměrech než jen v jednom. Tudíž se nám víc hodí definice výše, protože se bude dobře zobecňovat do více dimenzí.

Definice. Nechť X je konečná množina bodů v $\mathbb{R}^d$. Bod $m \in \mathbb{R}^d$ je α-*středobod*[1] množiny X, jestliže každý uzavřený poloprostor obsahující m obsahuje aspoň $\alpha|X|$ bodů[2] z X.

Tady narážíme na problém, že jsme si vlastně nedefinovali uzavřený poloprostor. V $\mathbb{R}^1$ tím myslíme polopřímku včetně hraničního bodu, v $\mathbb{R}^2$ je uzavřený poloprostor polorovina včetně hraniční

[1] Název *středobod* jsme si vymysleli a není standardní, anglicky se mu říká *centerpoint*.
[2] Symbol $|X|$ označuje počet prvků (v tomto případě bodů) množiny X.

přímky, v $\mathbb{R}^3$ je to rovina a všechno v jednom směru od ní atd. Asi si dokážeš představit, jak poloprostory fungují ve vyšších dimenzích. Nám bude stačit s poloprostory pracovat intuitivně, kdyby Tě ale i tak zajímalo, jak je definovat pořádně, uvádíme následující definici.

Definice. Pro libovolný nenulový vektor $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ a reálné číslo b tvoří množina bodů $x = (x_1, \ldots, x_d)$ splňujících

$$\sum_{i=1}^{d} a_i x_i \geq b$$

uzavřený poloprostor.

Kdybychom chtěli otevřený poloprostor (bez hranice), stačí nerovnost v definici změnit na ostrou. Teď už ale na formality spojené s poloprostory zapomeňme a pojďme se zamyslet nad tím, co vlastně středobod znamená.

Cvičení 1. Rozmysli si, že pro $d = 1$ a $\alpha = \frac{1}{2}$ definice středobodu splývá s mediánem.

Aby α-středobod existoval, koeficient α může být nejvýše 1. I když bude koeficient nejvýše jedna, pořád nemusí α-středobod existovat.

Cvičení 2. Jak vypadají množiny bodů, pro které existuje 1-středobod?

Naopak pro malé α je středobodů mnoho.

Cvičení 3. Jak vypadá množina 0-středobodů?

Cvičení 4. Nechť X je konečná neprázdná množina bodů v rovině. Jak vypadá množina jejích $\frac{1}{|X|}$-středobodů?

Nabízí se nám přirozená otázka, a to pro jaké největší α ještě bude α-středobod existovat. To samozřejmě závisí na tom, jak vypadá množina X. Možná by proto bylo lepší se zeptat, pro jaké největší α existuje α-středobod pro libovolnou množinu X, máme-li pevně danou dimenzi prostoru, v němž se X nachází. Ukazuje se, že tato hodnota je nepřímo úměrná dimenzi prostoru, ve kterém se pohybujeme.

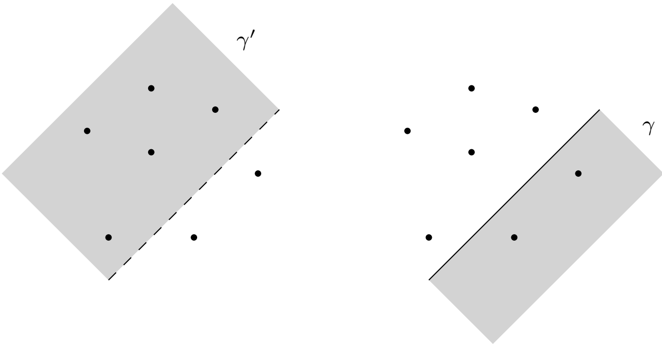
Tvrzení. *Pro libovolnou konečnou množinu X bodů z $\mathbb{R}^d$ existuje její $\frac{1}{d+1}$-středobod.*

Pro jednoduchost se domluvme, že když budeme dále v textu psát středobod, myslíme tím $\frac{1}{d+1}$-středobod. Než si toto tvrzení dokážeme, ukažme si nejdřív ekvivalentní definici α-středobodu.

Lemma. *Bod m je α-středobod množiny X právě tehdy, když každý otevřený poloprostor obsahující více než $(1-\alpha)|X|$ bodů z X zároveň obsahuje i m.*

Důkaz. Dokážeme postupně obě implikace. Nechť m je α-středobod. Kdyby existoval otevřený poloprostor γ' obsahující více než $(1-\alpha)|X|$ bodů z X a neobsahující m, můžeme uvážit jeho doplněk. Tento doplněk $\gamma = \mathbb{R}^d \setminus \gamma'$ je uzavřený poloprostor, který obsahuje m a méně než $\alpha|X|$ bodů z X. Potom by ale m nemohl být α-středobod.

Nyní předpokládejme, že každý otevřený poloprostor obsahující více než $(1-\alpha)|X|$ bodů z X zároveň obsahuje i m. Teď uvážíme libovolný uzavřený poloprostor γ obsahující m. Jeho doplněk je otevřený poloprostor γ' neobsahující m, takže může obsahovat nejvýše $(1-\alpha)|X|$ bodů z X. To znamená, že náš původní poloprostor γ obsahoval aspoň $\alpha|X|$ bodů z X. Tím jsme ukázali, že m je α-středobod.

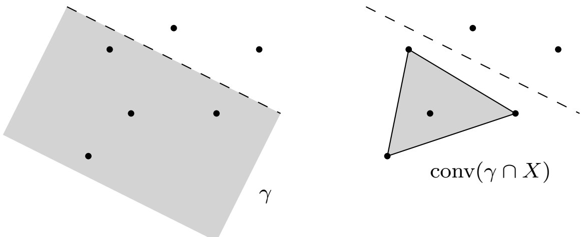


□

Teď už můžeme dokázat tvrzení o existenci středobodu.

Důkaz. Nechť X je libovolná konečná množina v $\mathbb{R}^d$. Uvažme všechny otevřené poloprostory, které obsahují více než $\frac{d}{d+1}|X|$ bodů z X. Kdyby se nám podařilo ukázat, že mají neprázdný průnik, máme vyhráno, protože všechny body uvnitř tohoto průniku by podle předchozího lemmatu byly středobody.

K důkazu, že se nějaké množiny protínají, by se nám mohla hodit Hellyho věta, kterou jsme si dokázali v minulém díle. Jenže otevřených poloprostorů je nekonečně mnoho. A na použití nekonečné Hellyho věty bychom potřebovali, aby byly uzavřené a omezené, otevřené poloprostory bohužel nejsou ani jedno z toho. Uděláme proto trik, místo otevřeného poloprostoru γ uvážíme konvexní obal všech bodů z X, které leží v γ, tedy $\mathrm{conv}(\gamma \cap X)$. Tento konvexní obal už je určitě uzavřený i omezený. Když dokážeme, že se protínají tyto konvexní obaly, určitě se budou protínat i otevřené poloprostory, protože konvexní obaly leží uvnitř těchto poloprostorů neboli $\mathrm{conv}(\gamma \cap X) \subset \gamma$.



Teď už nám podle nekonečné Hellyho věty stačí dokázat, že se protíná každých $d+1$ výše popsaných konvexních obalů. Označme si konvexní obaly postupně $\mathrm{conv}(X_1), \ldots, \mathrm{conv}(X_{d+1})$, platí $|X_i| > \frac{d}{d+1}|X|$. Když dokážeme, že množiny X_i mají neprázdný průnik, určitě budou mít neprázdný průnik i jejich konvexní obaly. Teď už si jen stačí všimnout, že v každé množině chybí méně než $\frac{1}{d+1}|X|$ bodů, takže v průniku jich chybí méně než $(d+1)\frac{1}{d+1}|X|$. Zapsáno formálně

$$\left|\bigcap_{i=1}^{d+1} X_i\right| \geq |X| - \sum_{i=1}^{d+1} |X \setminus X_i| > |X| - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{d+1}|X| = |X| - \frac{d+1}{d+1}|X| = 0.$$

Tím je splněna podmínka nekonečné Hellyho věty a existence středobodu je dokázána. □

Všimni si, že pro $d = 1$ nám toto tvrzení říká, že existuje medián.

Cvičení 5. Rozmysli si, že koeficient $\frac{1}{d+1}$ nejde zlepšit, tedy že pro $\alpha > \frac{1}{d+1}$ nemusí α-středobod existovat.

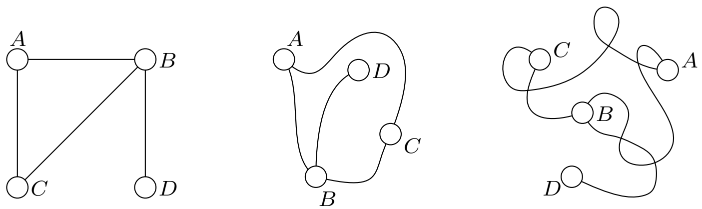
Grafy

Teď se na chvíli mírně odkloníme od předchozího tématu a budeme se bavit o teorii grafů. Nebude se jednat o grafy funkcí, ale půjde o kombinatorické objekty.

Definice. *Graf* $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice tvořená konečnou neprázdnou množinou *vrcholů* V a množinou *hran* $E \subseteq \binom{V}{2}$, kde prvky E jsou neuspořádané dvojice vrcholů.

Množina vrcholů může obsahovat prakticky cokoliv – můžeš si třeba představit množinu lidí, kde hrany vedou mezi těmi, co se znají. Nebo vrcholy můžou být třeba města a hrany letecké linky mezi nimi.

Pro začátek bychom si takový graf rádi nakreslili. Vrcholy by byly reprezentovány puntíky a hrany by byly čáry mezi nimi. Představme si, že se sešli Alice, Bára, Cyril a David. Bára se zná se všemi, a navíc se ještě zná Alice s Cyrilem. Odpovídající graf bychom mohli nakreslit třeba jako na obrázku. Všechna tři nakreslení reprezentují ten stejný graf, přestože vypadají jinak.



Po hranách nutně nepožadujeme, aby to byly úsečky, klidně to mohou být složitější křivky. Můžeš si ale všimnout, že některá nakreslení jsou přehlednější než jiná. Zejména to poslední je docela zmatené, hlavně kvůli křížení hran. Není proto překvapivé, že budeme upřednostňovat nakreslení, kde se hrany nekříží.

Pojďme si říct, co je to nakreslení grafu. Představujeme si ho prostě jako obrázek, na kterém je graf. Formálně je ale *nakreslení* nějaké zobrazení z grafu do roviny. Vrcholy se zobrazí na kruhy, které jsou navzájem disjunktní. Hrany se zobrazí na křivky[3], jejichž počáteční a koncové body jsou na hranicích kruhů odpovídajících vrcholům, které tato hrana spojuje. Zároveň by křivka neměla protínat sama sebe (jako je tomu na v případě hrany AC na třetím obrázku) ani kruhy odpovídající vrcholům kromě počátečního a koncového bodu. Problémem této definice je, že nevíme, co to je křivka. Ta navíc může být docela složitým objektem. Nám ale bude stačit s ní zacházet intuitivním způsobem a formality přenechat matematické analýze.

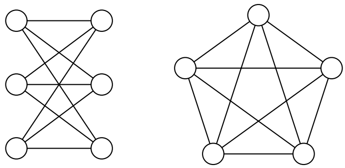
Pro nás budou zajímavé grafy, které lze nakreslit bez křížení hran.

Definice. Nakreslení grafu nazveme *rovinné*, jestliže se v něm nekříží hrany.

Definice. O grafu řekneme, že je *rovinný*, jestliže má rovinné nakreslení.

Nejsou náhodou všechny grafy rovinné? Nejsou, důležitými protipříklady jsou grafy nazývané $K_{3,3}$ a K_5, které vidíš na obrázku níže. Graf K_5 má pět vrcholů, mezi každými dvěma vrcholy vede hrana. Graf $K_{3,3}$ má dvě části, v každé jsou tři vrcholy. Hrany vedou mezi vrcholy, které jsou v různých částech.

[3]Pod pojmem *křivka* si prostě představ něco, co zvládneš nakreslit jedním tahem, aniž bys zvedl(a) tužku z papíru.



$K_{3,3}$ K_5

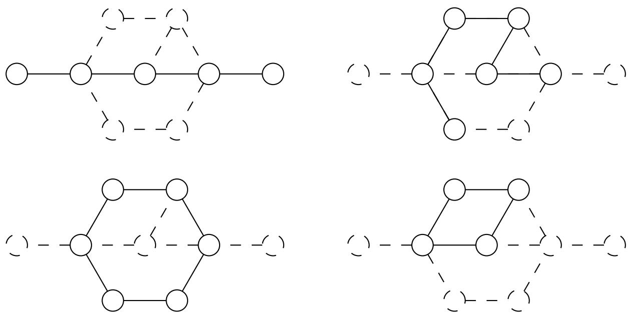
Grafy jsme nakreslili hezky symetricky za cenu toho, že se jejich hrany protínají na vícero místech. Není těžké najít nakreslení, kde bude průsečíků hran méně. Ať se ale budeš snažit sebevíc, aspoň jeden tam zůstane.

Cvičení 6. Najdi nakreslení $K_{3,3}$ a K_5, kde je jenom jeden průsečík.

$K_{3,3}$ a K_5 jsou nejmenší grafy, které nejsou rovinné. Když z nich smažeme libovolnou hranu, už rovinné budou. Navíc každý graf, který není rovinný, musí v jistém smyslu[4] obsahovat $K_{3,3}$ nebo K_5.

Abychom se mohli o grafech dál bavit, zavedeme si několik pojmů.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ jsou nějaké jeho vrcholy a $e_1, \ldots, e_n$ jsou jeho hrany takové, že $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Pokud $v_i \neq v_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq n+1$, nazýváme posloupnost $v_1 e_1 v_2 \ldots v_n e_n v_{n+1}$ *cestou.* Pokud $v_i \neq v_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq n$ a $v_1 = v_{n+1}$, nazýváme $v_1 e_1 v_2 \ldots v_n e_n v_{n+1}$ *kružnicí* nebo *cyklem.*



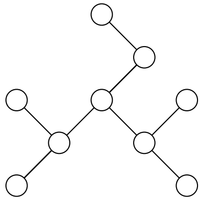
Pokud řekneme, že *mezi vrcholy u a v vede cesta*, myslíme tím, že při značení z předcházející definice existuje cesta splňující $u = v_1$ a $v = v_{n+1}$.

Definice. Graf G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vede cesta.

Definice. Podmnožinu vrcholů $V' \subseteq V$ nazveme *komponentou souvislosti*, jestliže mezi každými dvěma jejími vrcholy vede cesta a nelze do ní přidat žádný vrchol, aniž by tato vlastnost byla porušena.

Definice. *Strom* je souvislý graf, který nemá žádné kružnice.

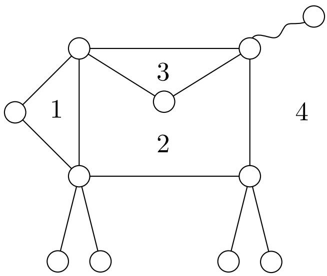
[4] Musí je obsahovat jako tzv. minor, což říká Kuratowského věta. Graf H je *minor* grafu G, pokud umíme H z G dostat nějakou posloupností následujících tří operací: smazání vrcholu a hran, které z něho vycházejí; smazání hrany; smazání hrany a sloučení obou příslušných vrcholů do jednoho.



O stromech je známo, že mají o jedna méně hran než vrcholů neboli pro ně platí $|E| = |V| - 1$. Má-li graf hran více, musí už nutně obsahovat kružnici. Obojí je snadné dokázat. Pokud jsi o stromech ještě neslyšel(a), můžeš si tato tvrzení dokázat pro seznámení se s právě zavedenými pojmy. Důkaz také nalezneš na straně 30 seriálu z 34. ročníku: *https://prase.cz/archive/34/serial.pdf*.

Eulerova formule

Definice. Mějme rovinné nakreslení grafu. Oblastem, na které je rovina tímto nakreslením rozdělena, budeme říkat *stěny*.

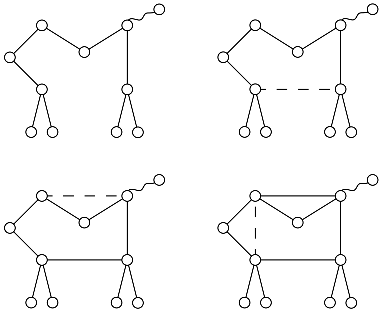


Poznamenejme, že jedna ze stěn každého rovinného nakreslení je nekonečná, té se zpravidla říká *vnější* stěna. Na první pohled není vůbec jasné, jestli počet stěn závisí na nakreslení. Způsobů, jak nakreslit rovinný graf, je spousta, nemohlo by se stát, že některá z nich budou mít více stěn než jiná? Odpověď je ne, nemohlo. Dokonce můžeme z počtu vrcholů a hran grafu snadno určit, kolik stěn bude mít jeho nakreslení. Tomuto vztahu se říká Eulerova formule.

Věta. (Eulerova formule) *Označme F množinu stěn rovinného nakreslení souvislého rovinného grafu $G = (V, E)$, potom platí*

$$|V| + |F| = |E| + 2.$$

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle počtu hran. Základ indukce je $|E| = |V| - 1$, pro menší počet hran by graf nebyl souvislý. Pokud má graf tento počet hran a je souvislý, nemá kružnice neboli je to strom. Tudíž jeho rovinné nakreslení má jen jednu stěnu a tvrzení platí. Nyní předpokládejme, že náš graf má více než $|V| - 1$ hran a že tvrzení platí pro všechny grafy, které mají méně než $|E|$ hran. Zafixujme si nějaké rovinné nakreslení našeho grafu. Víme, že musí obsahovat kružnici. Pokud odebereme jednu z hran této kružnice, graf zůstane souvislý a zmenší se o jedna počet jeho hran. Také se ale „sloučí“ dvě různé stěny nějakého rovinného nakreslení, tedy se o jedna zmenší i počet stěn nakreslení. Odebráním hrany jsme nepřidali žádné průsečíky hran, tedy i nakreslení takto zmenšeného grafu je rovinné. Pro tento zmenšený graf a jeho nakreslení rovnost platí z indukce, musí tudíž platit i pro původní graf.



□

Cvičení 7. Jak by vypadala Eulerova formule pro rovinný graf s k komponentami souvislosti?

Tvrzení. *Pro rovinný graf $G = (V, E)$ platí $3|V| - 6 \geq |E|$.*

Důkaz. Uvažme nějaké rovinné nakreslení G a označme množinu jeho stěn F. Eulerova formule nám říká, že platí $|V| + |F| = |E| + 2$. Nyní použijeme počítání dvěma způsoby. Spočítáme dvojice (stěna, hrana na její hranici). Každá hrana náleží jedné nebo dvěma stěnám, počet dvojic je tedy nejvýše $2|E|$. Zároveň každá stěna má alespoň tři hrany, tudíž počet těchto dvojic je alespoň $3|F|$. Dohromady dostáváme $|F| \leq \frac{2}{3}|E|$. Dosadíme do Eulerovy formule:

$$|V| + \frac{2}{3}|E| \geq |V| + |F| = |E| + 2.$$

Úpravou dostáváme požadované tvrzení. □

Cvičení 8. Dokaž, že grafy K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

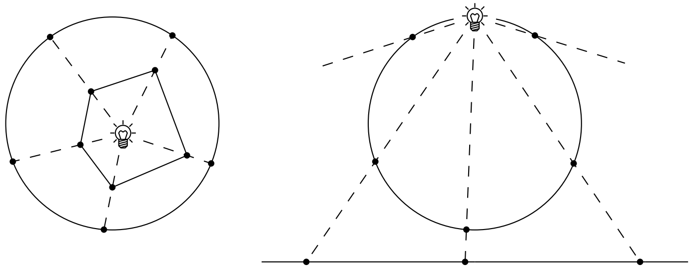
Ještě než se Eulerova formule dokázala pro obecné rovinné grafy, byla objevena pro konvexní mnohostěny.

Věta. (Eulerova formule pro mnohostěny) *Označme množiny vrcholů, hran a stěn konvexního mnohostěnu postupně V, E a F. Pak platí*

$$|V| + |F| = |E| + 2.$$

Důkaz. Ukážeme, že Eulerova formule pro mnohostěny je jenom speciálním případem Eulerovy formule pro rovinné grafy. To uděláme tak, že pro každý konvexní mnohostěn najdeme odpovídající rovinný graf se stejným počtem hran, vrcholů a stěn.

Abychom ukázali, že konvexní mnohostěn nám dává rovinný graf, prostě najdeme nějaké jeho rovinné nakreslení. Abychom nemuseli řešit, že je mnohostěn nějak placatý nebo šišatý, promítneme ho nejprve na sféru. Zvolíme si tedy libovolnou sféru takovou, že je celý mnohostěn uvnitř ní. Dále si zvolíme libovolný bod uvnitř mnohostěnu a z něj budeme promítat na sféru. Můžeš si to představit tak, že do bodu uvnitř mnohostěnu umístíme žárovku a na sféře se objeví stín. Tím se vrcholy zobrazí na body a hrany se zobrazí na kružnicové oblouky. Protože mnohostěn byl konvexní, obrazy žádných dvou hran se nebudou protínat. Dále vezmeme nějaký bod X na sféře, na který se nezobrazil žádný vrchol ani hrana mnohostěnu. Z bodu X uděláme takzvanou stereografickou projekci do roviny. To znamená, že vezmeme rovinu neprotínající sféru, aby byl X ze všech bodů na sféře od ní nejdál. Potom prostě uděláme projekci z X na tuto rovinu. Zase si můžeš představit, že jsme do bodu X umístili žárovku. Protože se hrany neprotínaly na sféře, nebudou se protínat ani po stereografické projekci, a dostali jsme tím pádem rovinné nakreslení se správným počtem hran, vrcholů a stěn.



□

Možná Tě trochu zarazilo, že pracujeme s mnohostěny, aniž bychom je pořádně definovali. To lze udělat více způsoby, například jako konvexní obal konečné množiny konvexně nezávislých bodů V, tj. žádný bod z množiny V nesmí jít vyjádřit jako konvexní kombinace ostatních. Navíc budeme požadovat, aby celý mnohostěn neležel v jedné rovině, tedy aby to nebyl mnohoúhelník umístěný do prostoru. Bodům množiny V potom říkáme vrcholy daného mnohostěnu. Můžeš si všimnout, že díky podmínce na konvexní nezávislost žádný vrchol nemůže být uprostřed stěny ani hrany.

Definovat nekonvexní mnohostěn už je trochu oříšek, proto to dělat nebudeme. Poznamenejme ale, že Eulerova formule platí i pro ně, avšak jenom pokud „nemají díry“.

Cvičení 9. Rozmysli si na nějakém konkrétním mnohostěnu s dírou, že pro něj Eulerova formule skutečně neplatí.

Úloha 1. Může existovat konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou šestiúhelníky?

Úloha 2. Dokaž, že každý mnohostěn, který nemá žádné čtyřúhelníkové ani pětiúhelníkové stěny, musí mít aspoň čtyři trojúhelníkové stěny.

Zajímavostí je, že kdybychom nechtěli, aby byl mnohostěn konvexní, a dokonce dovolili, aby v něm byly díry, nebude předchozí úloha platit. Známým protipříkladem je takzvaný *Szilassiho sedmistěn*[5].

Průsečíkové číslo

Definice. Mějme nějaké nakreslení grafu G, *průsečíkové číslo* tohoto nakreslení definujeme jako počet průsečíků křivek odpovídajících jeho hranám. Když se k křivek protíná v jednom bodě, počítáme to jako $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ průsečíků, jeden za každou dvojici protínajících se křivek.

Definice. *Průsečíkové číslo* grafu G definujeme jako minimum z průsečíkových čísel všech jeho nakreslení. Značíme jej $\mathrm{cr}(G)$.

Z definice platí $\mathrm{cr}(G) = 0$ právě pro rovinné grafy. Ve Cvičení 6 jsme ukázali, že $\mathrm{cr}(K_{3,3}) \leq 1$ a $\mathrm{cr}(K_5) \leq 1$, a ve Cvičení 8 zase $\mathrm{cr}(K_{3,3}) \geq 1$ a $\mathrm{cr}(K_5) \geq 1$. Než se podíváme na hlavní tvrzení o průsečíkovém čísle, dokážeme si jednoduché lemma.

Lemma. *Pro graf $G = (V, E)$ platí*

$$\mathrm{cr}(G) > |E| - 3|V|. \tag{1}$$

Důkaz. Uvažme nakreslení grafu G s právě $\mathrm{cr}(G)$ průsečíky. Z každé dvojice protínajících se hran můžeme vybrat jednu a odstranit ji. Odstraníme maximálně $\mathrm{cr}(G)$ hran a získáme tak rovinný graf.

[5] Jak přesně vypadá můžeš najít třeba tady: *https://en.wikipedia.org/wiki/Szilassi_polyhedron*.

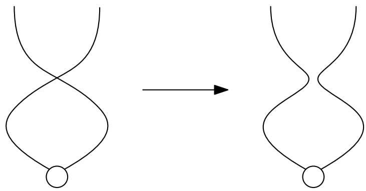
Z tvrzení v předchozí části víme, že počet hran rovinného grafu je méně než trojnásobek počtu jeho vrcholů, což nám dává dokazovanou nerovnost. $\square$

Věta. (O průsečíkovém čísle) *Pro graf* $G = (V, E)$ *platí*

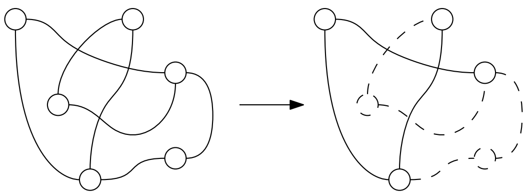
$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{|E|^3}{|V|^2} - |V|.$$

Důkaz této věty bude využívat pravděpodobnostní metodu. Konkrétně budeme potřebovat střední hodnotu. Pokud jsi ji nikdy nepotkal(a), může tato pasáž být trochu náročnější, ale neměla by být nějak důležitá pro pochopení zbytku seriálu ani k vyřešení žádné ze sériových úloh. *Střední hodnota* výrazu X (který závisí na náhodě) se značí $\mathbb{E}[X]$ a v podstatě říká, jaká je jeho průměrná hodnota. Například hodíme-li klasickou šestistěnnou kostkou a označíme S číslo, které padlo, jeho střední hodnota bude $\mathbb{E}[S] = 3.5$.

V následujícím důkazu budeme předpokládat, že se žádné dvě hrany sdílející vrchol neprotínají. Kdyby se protínaly, můžeme nakreslení upravit jako na obrázku a průsečíkové číslo nakreslení by se tím akorát snížilo.



Důkaz. Uvažme nakreslení grafu G. Můžeme předpokládat, že $|E| \geq 4|V|$, jinak je tvrzení triviální. Nyní si zvolíme pravděpodobnost $0 < p \leq 1$, její přesnou hodnotu určíme až na konci. Z množiny vrcholů V vybereme podmnožinu V'. Každý vrchol $v \in V$ přidáme do V' s pravděpodobností p, všechny vrcholy přidáme nezávisle na sobě. Vybraná množina vrcholů nám dává nějakou podmnožinu hran $E' \subseteq E$, hrana (u, v) bude v E' právě tehdy, když oba její koncové vrcholy leží v V', tedy $u, v \in V'$. To nám dává nějaký nový graf $G' = (V', E')$.



Každá hrana se dostala do E' s pravděpodobností p^2. Z linearity střední hodnoty platí $\mathbb{E}[|V'|] = p|V|$, $\mathbb{E}[|E'|] = p^2|E|$. [6] Původní nakreslení grafu G nám určuje nakreslení zmenšeného grafu G'. Označme x počet průsečíků původního nakreslení grafu G a x' počet průsečíků nakreslení G'. Platí $\mathbb{E}[x'] = p^4 x$, protože průsečík bude v novém nakreslení právě tehdy, když v něm budou obě příslušné hrany a ty jsou na sobě nezávislé (proto jsme nechtěli, aby se protínaly hrany sdílející koncový vrchol). Podle nerovnosti (1) platí $x' \geq |E'| - 3|V'|$. Tato nerovnost nám dává analogickou

[6] Tím jsme jenom formálně řekli, že v novém grafu bude v průměru $p|V|$ vrcholů a $p^2|E|$ hran, což by mělo být intuitivně jasné.

nerovnost pro střední hodnoty. Intuitivně řečeno, když nerovnost platí ve všech případech, musí platí i v průměru. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x'] &\geq \mathbb{E}[|E'|] - 3\,\mathbb{E}[|V'|],\\
p^4 x &\geq p^2|E| - 3p|V|,\\
x &\geq \frac{p|E| - 3|V|}{p^3}.
\end{aligned}$$

Teď si můžeme zvolit pravděpodobnost p. Ukazuje se, že správnou volbou je $p = \frac{4|V|}{|E|}$. To je číslo z intervalu $(0, 1\rangle$, protože jsme předpokládali $|E| \geq 4|V|$. Dosazením do nerovnosti výše je důkaz hotov. $\square$

Tento důkaz byl dost trikový – náhodně jsme vybrali podmnožinu vrcholů a za pomoci vztahu (1) jsme potom dokázali nerovnost. Pokud jsi ještě nikdy nic takového neviděl(a), může to vypadat trochu jako podvod – nedokázali jsme jenom, že to tvrzení platí s nějakou pravděpodobností? Ne, tohle je skutečně validní důkaz a tvrzení podle něj platí vždy. Kdybys chtěl(a) vidět víc podobných důkazů a dozvědět se něco víc o pravděpodobnosti, můžeš si přečíst seriál o pravděpodobnosti z 38. ročníku.[7]

Asymptotická notace

Zase na chvíli odbočíme od geometrie a vysvětlíme si asymptotickou notaci. Asymptotická notace se hodí k popisu toho, jak rychle něco roste. V podstatě nám umožňuje formálněji říct tvrzení stylu „Funkce f roste nejvýše tak rychle jako funkce g.“ Nezajímá nás, jak se funkce chová pro malé argumenty, rozhodující pro nás bude chování pro velké hodnoty. Proč bychom chtěli něco takového říkat? Často je docela jedno, jestli je něčeho $3n^2$ nebo $\frac{1}{4}n^2 + n$, a konstanty nám jenom překáží. Teď už se ale vrhněme na formální definici.

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ jsou funkce z přirozených do kladných reálných čísel. Píšeme $f \in \mathcal{O}(g)$, jestliže

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq N : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Výraz $f \in \mathcal{O}(g)$ zpravidla čteme „f je (velké) Ó g“.

Několik kvantifikátorů za sebou může na první pohled vypadat trochu děsivě, ale vlastně říkají něco hrozně jednoduchého. Znamená to, že pro všechna n, která jsou dostatečně velká, je $f(n)$ maximálně konstanta krát $g(n)$. Výraz $\mathcal{O}(g)$ potom můžeme chápat jako třídu[8] funkcí, které nerostou rychleji než g. Výrazem $f \in \mathcal{O}(g)$ potom říkáme, že f patří do třídy funkcí rostoucích nejvýše tak rychle jako g.

Do třídy $\mathcal{O}(n^2)$ patří například funkce $4n + 3$, $n^{3/2}$ nebo $2n^2$. Naopak do ní nepatří n^3 nebo 2^n. Velké O se navíc chová hezky vzhledem ke sčítání a násobení konstantou.

Tvrzení. *Jestliže $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$, potom i $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(g)$.*

Tvrzení. *Jestliže $f \in \mathcal{O}(g)$ a $c \in \mathbb{R}^+$, potom i $c \cdot f \in \mathcal{O}(g)$.*

Cvičení 10. Dokaž předchozí dvě tvrzení.

Příklad. Maximální počet rovnostranných trojúhelníků tvořených n body v rovině je $\mathcal{O}(n^2)$.

Řešení. Nejprve si formálně zapišme, co po nás zadání chce. Označme $f(n)$ maximální možný počet rovnostranných trojúhelníků na n bodech v rovně. Máme tedy funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ a chceme

[7] Seriál najdeš na adrese *https://prase.cz/archive/38/serial.pdf.*

[8] *Třída* je jenom trochu lepší množina.

dokázat $f \in \mathcal{O}(n^2)$. Počet všech trojic tvořených n body je $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, a tedy $f(n) \le \frac{1}{6}n^3$. To nám ale dává jenom $f \in \mathcal{O}(n^3)$, musíme udělat něco chytřejšího.

Uvažme libovolnou dvojici bodů, těch je $\binom{n}{2} \in \mathcal{O}(n^2)$. Pro každou takovou dvojici potom existují nejvýše dva body, které s ní tvoří rovnostranný trojúhelník. Dvojnásobek počtu dvojic bodů je určitě také v $\mathcal{O}(n^2)$. Nějaké trojúhelníky jsme takto mohli započítat dvakrát, ale to nevadí, dokázali jsme $f \in \mathcal{O}(n^2)$.

Poznamenejme ještě, že tento odhad je velmi slabý, ke konci tohoto dílu si ukážeme mnohem silnější odhady.

Co kdybychom ale chtěli říct, že nějaká funkce naopak roste aspoň tak rychle jako jiná? K tomu slouží následující notace.

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ jsou funkce z přirozených do kladných reálných čísel. Píšeme $f \in \Omega(g)$, jestliže

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \ge N : f(n) \ge c \cdot g(n).$$

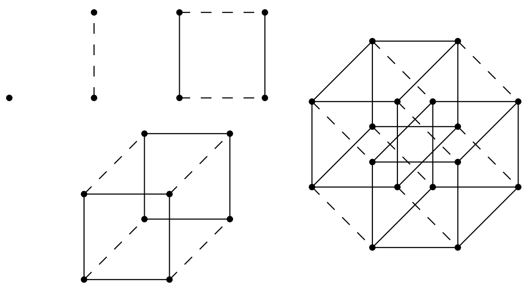
Výraz $f \in \Omega(g)$ zpravidla čteme „f je (velká) omega g“.

Definice Ω je naprosto analogická definici $\mathcal{O}$, jenom jsme změnili znaménko nerovnosti.

Příklad. Dokaž, že maximální počet dvojic bodů s jednotkovou vzdáleností je $\Omega(n \log n)$.[9]

Řešení. Nejprve si ujasněme, jak něco takového dokázat. Bude nám stačit najít posloupnost množin bodů v rovině $S_1, S_2, \ldots$ takových, že $|S_n| = n$, a označíme-li $f(n)$ počet jednotkových vzdáleností v S_n, platí $f \in \Omega(n \log n)$.

Nejprve zkonstruujeme množiny o velikostech mocniny dvou. Množina S_1 bude dána jedním bodem. Množina S_{2^k} potom vznikne z množiny $S_{2^{k-1}}$ tak, že množinu $S_{2^{k-1}}$ duplikujeme a posuneme libovolným směrem o vzdálenost 1. Musíme být trochu opatrní, aby nám přitom nějaké body nesplynuly. Naštěstí máme na výběr nekonečně mnoho směrů a jenom v konečně mnoha z nich nějaké body splynou. Nyní se podívejme na počet takto vytvořených jednotkových vzdáleností. Zjevně platí $f(1) = 0$ a $f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 2^{k-1}$. Je snadné dokázat, že řešením této rekurence je $f(2^k) = 2^{k-1}k$. Pro $n = 2^k$ tedy dostáváme $f(n) = \frac{1}{2}n \log n$. Teď nám zbývá dořešit, co udělat s n, která nejsou mocninami dvou. Prostě najdeme libovolnou mocninu dvou menší rovnou n, uděláme konstrukci pro ni a zbylé body tam naházíme libovolně. To nám dá $f(n) \ge \frac{1}{2}n' \log n'$, kde n' je největší mocnina dvou nepřevyšující n, zjevně platí $n' \ge \frac{n}{2}$. Jednoduchou úpravou dostaneme $f(n) \ge \frac{1}{4}n(\log(n) - 1)$. To je pro dostatečně velké n určitě aspoň $\frac{1}{8}n \log n$, takže $f \in \Omega(n \log n)$ a jsme hotovi. Můžeš si všimnout, že jsme během konstrukce vlastně kreslili hyperkrychli do roviny.



Tohle není nejlepší známý odhad, lze dokonce použít $\Omega\left(n^{1+\frac{c}{\log \log n}}\right)$ pro jistou kladnou reálnou konstantu c. Konstrukce je opět poměrně jednoduchá – body se jenom dají do čtvercové mřížky o vhodných rozměrech. Důkaz ale vyžaduje netriviální znalosti teorie čísel. Proč funkce

[9]Symbolem log zde značíme dvojkový logaritmus. Na základu logaritmu tady ovšem moc nezáleží, protože všechny logaritmy se liší jenom multiplikativní konstantou.

z $\Omega\left(n^{1+\frac{c}{\log\log n}}\right)$ už nutně je i v $\Omega(n \log n)$, nemusí být na první pohled jasné. Důkaz je poněkud technický a není z pohledu kombinatorické geometrie nijak zajímavý, takže ho tu neuvádíme.

Úloha 3. Dokaž, že maximální počet jednotkových vzdáleností mezi n body v $\mathbb{R}^4$ je $\Omega(n^2)$.

Asymptotickou notaci můžeme definovat i pro více proměnných. Definice je velmi podobná té pro jednu proměnnou.

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}^+$, píšeme $f \in \mathcal{O}(g)$, jestliže existují $N \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pokud je aspoň jedno z $n_1, \ldots, n_k$ větší rovno N, tak

$$f(n_1, \ldots, n_k) \leq c \cdot g(n_1, \ldots, n_k).$$

Upozorňujeme, že v některých kontextech může být požadováno, aby $n_i \geq N$ platilo pro všechna i, a ne jen pro jedno. Většinou by na tom ale nemělo záležet.

Incidence a Szemerédi–Trotter

V této sekci se budeme zabývat body a přímkami v rovině. Budeme přitom počítat, kolikrát se stane, že nějaký bod leží na nějaké přímce.

Definice. Nechť je dána množina bodů P a množina přímek L v rovině. *Incidencí* rozumíme uspořádanou dvojici (p, l) takovou, že $p \in P$, $l \in L$ a $p \in l$. Výrazem $I(P, L)$ budeme rozumět počet incidencí tvořených body z P a přímkami z L. Pro přirozené n a m označme $I(n, m)$ maximum $I(P, L)$ přes všechny možné konfigurace P a L splňující $|P| = n$ a $|L| = m$.

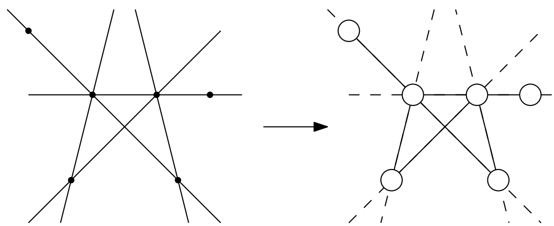
Szemerédiho–Trotterova věta nám dává těsný odhad na počet incidencí, a jak si za chvíli ukážeme, dovolí nám odhadnout i spoustu dalších věcí.

Věta. (Szemerédi–Trotter) *Platí*

$$I(n, m) \in \mathcal{O}(n^{2/3} m^{2/3} + n + m).$$

To může na první pohled vypadat jako poněkud divoký výraz. Speciálně pro $m = n$ se tvrzení zjednoduší na $I(n, n) \in \mathcal{O}(n^{4/3})$.

Důkaz. Mějme množinu bodů $|P| = n$ a množinu přímek $|L| = m$. Definujeme graf $G = (P, E)$, jehož vrcholy jsou body množiny P, které jsou spojené hranou právě tehdy, když jsou na jedné přímce $l \in L$, a navíc mezi nimi na l neleží žádný další bod z P. Konfigurace bodů a přímek v rovině nám zároveň dává nakreslení grafu G.



Graf G má $|P| = n$ vrcholů, kolik má ale hran? Jestliže na přímce l leží $k \geq 1$ bodů, vznikne na ní $k - 1$ hran. To znamená, že skoro každá incidence nám přidá hranu, můžeme tedy odhadnout $I(n, m) \leq |E| + m$. A jaké bude průsečíkové číslo našeho nakreslení G? Hrany G leží na m různých přímkách, proto mohou mít nejvýše $\binom{m}{2}$ průsečíků, takže $\mathrm{cr}(G) \le \binom{m}{2}$. Na druhou stranu známe dolní odhad na průsečíkové číslo grafu, to nám dává nerovnost

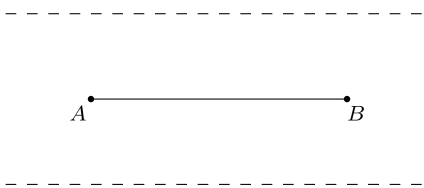
$$\frac{1}{64}\frac{|E|^3}{n^2} - n \le \mathrm{cr}(G) \le \binom{m}{2}.$$

V kombinaci s $I(n,m) \le |E| + m$ jednoduchou úpravou zjistíme $I(n,m) \in \mathcal{O}(n^{2/3}m^{2/3} + n + m)$, čímž je důkaz hotov. $\square$

Příklad. Dokaž, že maximální počet trojúhelníků o obsahu 1 s vrcholy v n bodech je $\mathcal{O}(n^{7/3})$.

Řešení. Zvolme si jeden z n bodů a ukažme, že je součástí $\mathcal{O}(n^{4/3})$ trojúhelníků o obsahu 1. Označme si náš vybraný bod A.

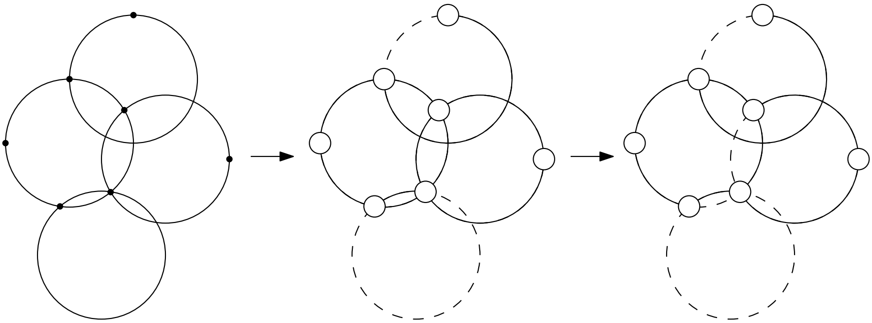
Nyní si zvolme nějaký další bod, označme jej B. Kde může ležet bod C, aby měl trojúhelník ABC obsah 1? Odpovědí je, že musí ležet někde na dvou pevných přímkách rovnoběžných s AB, protože výška tohoto trojúhelníku je pevně daná. Máme $n-1$ možností, jak zvolit bod B, to nám dává $2n-2$ přímek. Pozor na to, že některé dvojice přímek mohly splynout. To se stalo právě tehdy, když nějaké dva body B_1 a B_2 ležely na jedné přímce s A a zároveň od A byly stejně daleko. Nikdy se ale nestane, že by splynuly tři nebo více přímek. Každý bod ležící na nějaké z těchto přímek nám přidá maximálně dva trojúhelníky (dva v případě, že daná přímka je dvojitá). Stačí nám tedy spočítat počet incidencí nejvýše $2n-2$ přímek a $n-1$ bodů. Maximální počet těchto incidencí je ale podle Szemerédiho–Trotterovy věty $\mathcal{O}(n^{4/3})$, čímž je důkaz hotov.



Příklad. Dokaž, že maximální počet jednotkových vzdáleností mezi n body je $\mathcal{O}(n^{4/3})$.

Řešení. Tentokrát nepoužijeme Szemerédiho–Trotterovu větu přímo, ale modifikujeme její důkaz. Okolo každého bodu nakreslíme kružnici o poloměru 1. Mezi dvěma body je vzdálenost 1 právě tehdy, když každý z nich leží na kružnici o poloměru 1 se středem v tom druhém. Stačí nám tedy odhadnout počet incidencí n bodů a n kružnic.

Můžeme udělat obecnější odhad pro n bodů a m kružnic o jednotkovém poloměru. Zase nakreslíme graf G, který má jako vrcholy body naší množiny, a dva body jsou spojené hranou, pokud spolu sousedí na kružnici. Potíž je, že dva body mohou sousedit na dvou kružnicích. Kdyby mezi dvěma vrcholy vedly dvě hrany, libovolnou z nich odstraníme. Kvůli odstraňování hran dostaneme trochu slabší odhad než předtím, ale to nevadí, konstanty nás nezajímají. Dostáváme $I(n,m) \le 2|E| + 2m$. Náš odhad na $\mathrm{cr}(G)$ teď také bude trochu slabší, protože dvě kružnice se mohou protínat až ve dvou různých bodech, platí $\mathrm{cr}(G) \le 2\binom{m}{2}$. Konec důkazu je úplně stejný jako v případě Szemerédiho–Trotterovy věty.



Teď už umíme maximální počet jednotkových vzdáleností mezi n body odhadnout zdola i shora. Jenže naše odhady jsou dost daleko od sebe, tak který je ten správný? Problém už několik desítek let zůstává otevřený a pořád se neví, jaká je správná hodnota.

Úloha 4. Nechť S je n-prvková množina bodů v rovině a označme $D = \{|x - y| \mid x, y \in S\}$, tedy množinu všech vzdáleností mezi dvojicí bodů z S. Velikost D udává počet různých vzdáleností tvořených body z S. Dokaž, že minimální počet těchto různých vzdáleností tvořených n body je $\Omega(n^{2/3})$.

Závěr

Dospěli jsme ke konci našeho putování kombinatorickou geometrií. Doufáme, že Tě to s námi bavilo. Pokud ano, máme pro tebe dobrou zprávu – zdaleka jsme nestihli vyčerpat všechna témata, která kombinatorická geometrie nabízí. Pokud by ses chtěl(a) dozvědět víc, můžeš se podívat třeba do následujících skript: *https://kam.mff.cuni.cz/~matousek/kvg1-tb.pdf*.

Rádi bychom poděkovali všem, kteří pomáhali seriálu vzniknout, a to především Hedvice a Matějovi. Majda a Pepa

Návody ke cvičením

2. Podívej se na definici.

3. Znovu se podívej na definici.

4. Kolik je $\frac{|X|}{|X|}$?

5. Jak to je pro malá d, pro něž si to ještě umíš představit?

6. Stačí některé hrany nakreslit „okolo“ zbytku grafu místo skrz něj.

7. Kolik nejméně hran je třeba přidat, aby se z grafu stal souvislý graf?

8. Pro K_5 použij tvrzení, pro $K_{3,3}$ ho zlepši.

9. Začni s nějakým hezkým mnohostěnem a zkus z něj něco odřezat.

10. Rozepiš si definice, pak by to mělo být jasné.

Návody k úlohám

1. Spočítej dvojice (stěna, hrana na její hranici) a (vrchol, hrana z něj vycházející).

2. Tato úloha je velmi podobná předchozí.

3. Zkus body rozdělit do dvou skupinek tak, aby vzdálenost libovolných dvou bodů z různých skupinek byla 1.

4. Použij odhad na počet jednotkových vzdáleností.

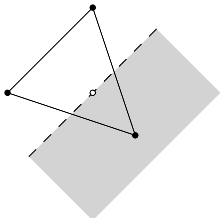
Řesení cvičení

2. 1-středobod mají pouze jednoprvkové množiny (a prázdná množina).

3. Jedná se o celý prostor.

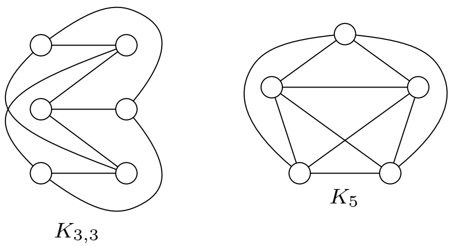
4. Je to konvexní obal X. Libovolná přímka procházející konvexním obalem totiž odřízne aspoň jeden bod. Analogie tohoto platí i ve vyšších dimenzích – množinou $\frac{1}{|X|}$-středobodů je taky konvexní obal.

5. Protipříkladem je třeba $d+1$ afinně nezávislých bodů. V rovině by to byly vrcholy trojúhelníku a v prostoru vrcholy čtyřstěnu. Rozeberme důkaz pro čtyřstěn: Žádný bod vně čtyřstěnu určitě nemůže být α-středobod pro žádné $\alpha > 0$. Zvolme libovolný bod uvnitř nebo na hranici čtyřstěnu a uvažme rovinu procházející tímto bodem rovnoběžnou se stěnou čtyřstěnu, ve které tento bod neleží. Na jedné straně od této roviny je zjevně jenom jeden vrchol, takže náš bod nemůže být α-středobod pro žádné $\alpha > \frac{1}{d+1}$. Na obrázku je naznačena situace v dvou dimenzích.



Ve vyšších dimenzích bychom to mohli dokázat úplně stejně, jenom na to nemáme patřičný aparát. Také by stačilo zvolit nadrovinu rovnoběžnou s nějakou stěnou vícerozměrného simplexu[10].

6.



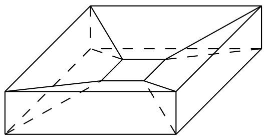
7. $|V| + |F| = |E| + k + 1$.

8. Pro K_5 stačí použít tvrzení o počtu hran a vrcholů rovinného grafu. Má totiž 5 vrcholů a $\binom{5}{2} = 10$ hran, tedy $3|V| - 6 = 9 < 10 = |E|$. Tudíž tvrzení nesplňuje a nemůže být rovinný.

[10]Simplex je zobecnění čtyřstěnu do více dimenzí. Je to mnohostěn, který má $d + 1$ afinně nezávislých vrcholů.

Pro $K_{3,3}$ musíme tvrzení trochu vylepšit. Protože to je bipartitní graf, neobsahuje cykly liché délky. Každá stěna jeho případného rovinného nakreslení by tudíž musela mít alespoň čtyři hrany. Dostáváme $|V| + \frac{2}{4}|E| \geq |V| + |F| = |E| + 2$, z čehož získáme nerovnost $2|V| - 4 \geq |E|$. Ovšem pro $K_{3,3}$ platí $|V| = 6$ a $|E| = 9$, tedy nemůže být rovinný.

9. Funguje třeba mnohostěn, který vznikne následujícím způsobem. Vezmeme kvádr a na dvě jeho protější stěny postavíme směrem dovnitř komolé čtyřboké jehlany, které budou sdílet menší podstavu. Tyto dva jehlany odebereme, jejich menší podstava bude ona kýžená díra. Tento mnohostěn má dvanáct vrcholů, dvanáct stěn, ale dvacet čtyři hran.



10. Z definice existuje N_1 a c_1 takové, že pro každé $n \geq N_1$ platí $f_1(n) \leq c_1 g(n)$. Obdobně existuje N_2 a c_2 pro f_2. Pro funkci $f_1 + f_2$ stačí vzít jako N větší z čísel N_1 a N_2 a jako c vzít $c_1 + c_2$.

Pro druhé tvrzení vezmeme pro $c \cdot f$ stejné N jako pro f, konstantu vynásobíme c.

Řesení úloh

1. Víme, že mnohostěn je vlastně rovinný graf a musí proto splňovat Eulerovu formuli. Kdyby všechny jeho stěny byly šestiúhelníky, počítáním dvojic (stěna, jí náležící hrana) dvěma způsoby zjistíme, že $|F| = \frac{1}{3}|E|$. Dosazením a úpravou Eulerovy formule dostaneme $|V| = \frac{2}{3}|E| + 2$. Protože pracujeme s konvexním mnohostěnem, z každého vrcholu musí vycházet alespoň tři hrany. Tedy spočítáme-li dvěma způsoby počet dvojic (vrchol, hrana, z něj vycházející), dostaneme $|V| \leq \frac{2}{3}|E|$. Avšak z Eulerovy formule plyne opačná nerovnost, což je spor.

2. Opět použijeme, že mnohostěn musí splňovat Eulerovu formuli a že z každého vrcholu vychází alespoň tři hrany, tedy $|V| \leq \frac{2}{3}|E|$. Pro spor předpokládejme, že mnohostěn má nejvýše tři trojúhelníkové stěny. Počítáním dvěma způsoby dostaneme $6|F| - 3 \cdot 3 \geq 2|E|$, což upravíme na $|F| \geq \frac{1}{3}|E| + \frac{1}{2}$. Dosazením do Eulerovy formule dostáváme $|V| + \frac{1}{3}|E| + \frac{1}{2} \geq |E| + 2$. To nám po úpravě dá $|V| \geq \frac{2}{3}|E| + \frac{3}{2}$, z čehož plyne $|V| > \frac{2}{3}|E|$. To je ve sporu s nerovností výše.

3. Naše body rozdělíme rozdělíme do skupinek velikosti přibližně $\frac{n}{2}$. Body první skupinky budou mít souřadnice $(x, y, 0, 0)$, kde $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Body druhé skupinky budou mít analogicky souřadnice $(0, 0, z, w)$, kde $z^2 + w^2 = \frac{1}{2}$. Vzdálenost libovolných dvou bodů $(x, y, 0, 0)$ a $(0, 0, z, w)$ z různých skupinek potom bude podle Pythagorovy věty $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Tím jsme hotovi, protože počet dvojic z různých skupinek je $\Omega(n^2)$. Ještě si můžeme rozmyslet, jak naše množina bodů vlastně vypadá. Obě skupinky jsme rozmístili na kružnice se středem v počátku o poloměru $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tyto kružnice jsou na sebe navíc „hodně kolmé“, leží totiž v rovinách, které se protínají v právě jednom bodě.

4. Odhad na jednotkové vzdálenosti nám říká, že ať si zvolíme libovolné d, maximálně $\mathcal{O}(n^{4/3})$ různých párů bodů z S bude mít vzdálenost d. Celkový počet dvojic je ale $\binom{n}{2} \in \Omega(n^2)$. Máme tedy dolní odhad na počet dvojic a horní odhad na počet dvojic ve stejné vzdálenosti, jejich podíl nám dává dolní odhad na počet různých vzdáleností, a to $\Omega\left(\frac{n^2}{n^{4/3}}\right) = \Omega(n^{2/3})$. Kdybys nám nevěřil(a), že s asymptotickou notací můžeme dělat tyhle úpravy, můžeš si to rozepsat z definice.