Kombinatorická geometrie II – Síla konvexity

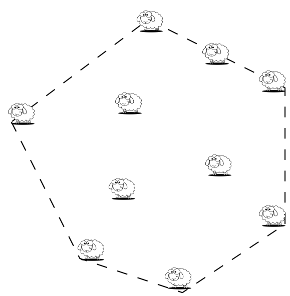
Milý příteli,
dostává se Ti do rukou již druhý díl seriálu o kombinatorické geometrii. V minulém díle sis mohl(a) všimnout, že konvexní mnohoúhelníky se chovají daleko příjemněji a předvídatelněji než mnohoúhelníky nekonvexní. Například v první soutěžní úloze první série by se odpověď změnila, kdybychom se omezili jen na konvexní mnohoúhelníky. U konvexních mnohoúhelníků jsme zase v závislosti na počtu vrcholů uměli určit, kolik mají triangulací, zatímco u nekonvexních počet triangulací závisí na tvaru. Konvexní mnohoúhelník se svým vnitřkem je speciálním případem konvexní množiny. Tu si v tomto díle definujeme a podíváme se, jaké hezké věty pro ni platí. Na rozdíl od předchozího dílu budeme pracovat nejen v rovině, ale i v prostoru a obecně ve vyšších rozměrech. Vytvoříme si několik nástrojů pro práci s body ve více rozměrech. Než se do toho ale pustíme, budeme se ještě chvíli držet při zemi (v rovině).

Přejeme Ti příjemné čtení a hodně štěstí při řešení soutěžních úloh. Připomínáme, že jsou seřazené podle obtížnosti, nikoli podle témat v seriálu.

Pepa a Majda

Konvexní obal

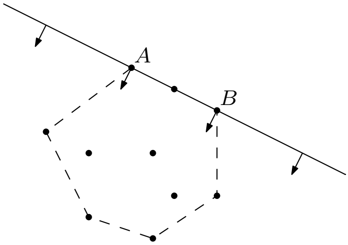
V této kapitole si ukážeme další způsob, jak si udělat pořádek v konečné množině bodů v rovině. Představ si, že na louce stojí ovečky a my bychom kolem nich rádi postavili ohrádku. Taková správná ohrádka je konvexní mnohoúhelník. Zároveň by se ale sousedi zlobili, kdybychom ohrádkou zabrali moc velký kus louky. Tudíž postavíme ohrádku co nejmenší. Jak bude vypadat ta část louky, kterou si ohrádkou zabereme? Nazvěme ji *konvexní obal* našich oveček.



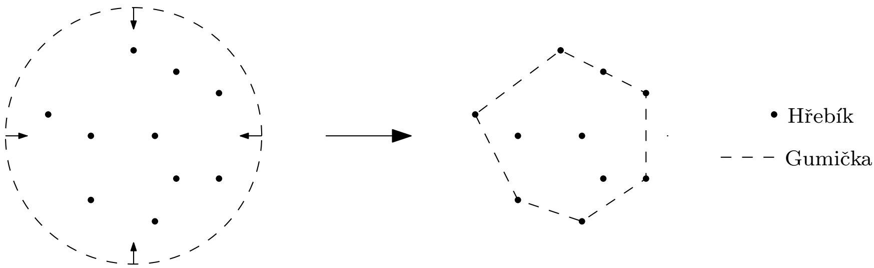
Za konvexní obal bodů (oveček) považujeme mnohoúhelník i s jeho vnitřkem. To proto, aby tato definice souhlasila s definicí pro obecné množiny, kterou si později ukážeme. Terminologie s konvexním obalem spojená ale spíš připomíná terminologii mnohoúhelníků. Když bod leží na obvodu konvexního obalu, říkáme, že leží *na* konvexním obalu. O ostatních bodech konvexního obalu říkáme, že leží *uvnitř* něj.

Dále je dobré si uvědomit, že pro konečnou množinu bodů X v rovině má konvexní obal vrcholy v bodech X. Intuitivně, kdyby tomu tak nebylo, šel by roh alespoň o kousek „uříznout“. Když jsou body z X v obecné poloze, tedy žádné tři neleží na přímce, dokonce žádné další body z X na konvexním obalu nejsou.

Můžeme si povšimnout, že pro dva sousední body A a B na konvexním obalu jsou všechny ostatní body z X v jedné polorovině od přímky AB.



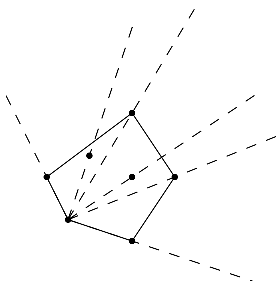
Jiný způsob, jak se na konvexní obal dívat, je následující. Představíme si, že body v rovině jsou hřebíky a my okolo nich natáhneme gumičku. Gumička se stáhne a bude tvořit hranici konvexního obalu.



Cvičení 1. V rovině leží $n \geq 3$ bodů, kolik nejméně a nejvíce z nich může ležet na konvexním obalu?

Příklad. V rovině leží 200 bodů v obecné poloze. Dokaž, že nějaké tři z nich tvoří úhel o velikosti méně než 1°.

Řešení. Uvážíme konvexní obal těchto bodů, to bude konvexní mnohoúhelník. Zvolme si libovolný vrchol na konvexním obalu, u něj je určitě úhel menší než 180°. Uvnitř tohoto úhlu leží zbývajících 197 bodů. Úhel tedy můžeme rozdělit na 199 disjunktních částí, které dohromady dají méně než 180°. Aspoň jedna z těchto částí proto musí mít velikost menší než 1°.



Všimni si, že jsme předchozí příklad mohli vyřešit i za pomoci extremálního principu – mohli jsme uvážit třeba bod nejvíce dole. To je docela běžné, neznamená to ale, že by konvexní obal nebyl užitečný. Formulace pomocí konvexního obalu může být výrazně jednodušší (obzvlášť když potřebujeme něco složitějšího než jenom jeden extremální bod) a také se o ní někdy snadněji přemýšlí.

Úloha 1. V rovině leží n bodů v obecné poloze. Dokaž, že z nich můžeme vybrat tři body tak, aby všechny ostatní body ležely uvnitř nebo na hranici kružnice opsané těmto bodům.

V úlohách budeme docela často postupovat indukcí. K čemu tedy potřebujeme konvexní obal, když úlohu stejně vyřešíme indukcí? Indukovat obvykle budeme podle počtu bodů, a to tak, že odebereme nějaký bod (nebo i více bodů) na konvexním obalu.

Příklad. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazýváme *kolumbijským*, jestliže je z nich 2013 červených, 2014 modrých a žádné tři neleží v přímce. O skupině přímek v rovině řekneme, že je *dobrá* pro dané rozmístění, jestliže

- žádná z přímek neprochází žádným bodem rozmístění,
- žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev.

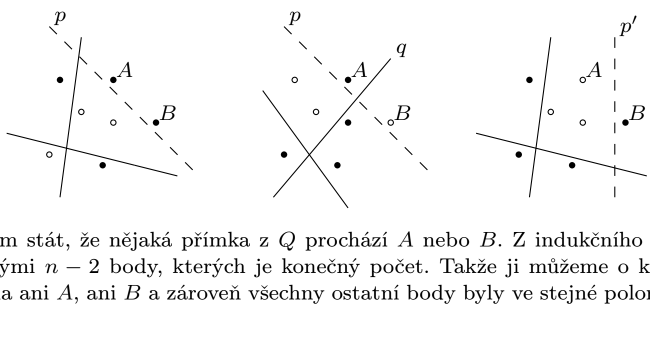
Najdi nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění 4027 bodů v rovině v ní existuje skupina k dobrých přímek. (IMO 2013)

Řešení. Odpovědí je 2013. Dokážeme jenom dolní odhad, tedy že nám 2013 přímek opravdu vždy stačí. Konstrukci, kdy jich 2013 opravdu potřebujeme, ponecháme jako cvičení. Budeme postupovat indukcí, dokonce dokážeme něco ještě trochu silnějšího.

Lemma. *Když je červených a modrých bodů dohromady n, stačí nám na jejich rozdělení $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ přímek.*

Lemma dokážeme indukcí, pro $n \leq 2$ je tvrzení triviální. Nyní předpokládejme, že platí pro $n-2$ a dokažme jej pro n. Uvažme konvexní obal barevných bodů a vyberme na něm dva sousedící body, označme je A a B. Tyto dva body můžeme od všech ostatních oddělit nějakou přímkou, nazvěme ji p. Zbylých $n-2$ bodů umíme z indukčního předpokladu rozdělit $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ přímkami, množinu těchto přímek označme Q. Rozlišíme tři případy:

(1) A a B mají stejnou barvu. Potom vyhovuje množina $Q \cup \{p\}$.
(2) A a B mají různé barvy a odděluje je od sebe nějaká přímka $q \in Q$. Potom opět vyhovuje množina $Q \cup \{p\}$.
(3) A a B mají různé barvy a neodděluje je od sebe žádná přímka z Q. Po nakreslení všech přímek z Q musí A a B ležet v oblasti, ve které mají všechny body až na jeden (A nebo B) stejnou barvu. Teď nám stačí uvážit přímku p', která odděluje A nebo B od všech ostatních. Taková přímka jistě existuje, protože A i B jsou na konvexním obalu. Hledaná množina přímek je $Q \cup \{p'\}$.



Mohlo by se nám stát, že nějaká přímka z Q prochází A nebo B. Z indukčního předpokladu ale neprochází zbylými $n-2$ body, kterých je konečný počet. Takže ji můžeme o kousek posunout, aby neprocházela ani A, ani B a zároveň všechny ostatní body byly ve stejné polorovině od ní jako předtím.

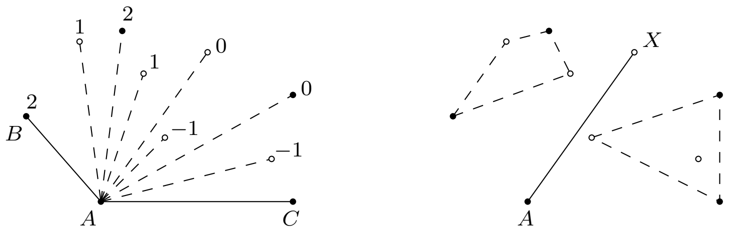
Cvičení 2. Rozmysli si, že v předchozí úloze někdy opravdu potřebujeme 2013 přímek.

Ukážeme si alternativní řešení příkladu, který už jsme viděli v minulém dílu v kapitole o extremálním principu.

Příklad. V rovině leží n černých a n bílých bodů v obecné poloze. Dokaž, že je možné popárovat černé body s bílými tak, že se úsečky spojující páry nebudou protínat.

Řešení. Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ zjevně platí. Nyní předpokládejme, že úloha platí pro každé k od 1 do n a dokážeme ji pro $n + 1$. Vezmeme konvexní obal všech bodů, černých i bílých dohromady. Zvolme si libovolný vrchol na něm, označme jej A, nechť je BÚNO černý. Sousedy zvoleného bodu označme B a C. Kdyby byl jeden z nich bílý, mohli bychom ho spojit s A a tvrzení by platilo z indukčního předpokladu. Dále tedy předpokládejme, že jsou oba jeho sousedi také černí.

Všechny body kromě A si setřiďme podle směrnice polopřímky z A do nich. Použijeme diskrétní spojitost. K B napišme číslo 2. Nyní postupujme podle úhlu, když narazíme na bílý bod, snížíme hodnotu o 1, když na černý, zvýšíme ji o 1. Takto pokračujeme až k bodu těsně před C. U něj určitě budeme mít číslo -1, protože celkem je černých a bílých bodů stejně. Začali jsme na 2, skončili na -1, takže jsme určitě někdy museli být na 0. Dokonce jsme někdy museli být na 0, když jsme zrovna zpracovávali bílý bod. To protože jsme se na 0 někdy museli dostat z 1 tím, že jsme klesli o 1, což se muselo stát v bílém bodě, označme jej X. Teď nám stačí spojit A s X. Na obou stranách přímky AX je stejně bílých a černých bodů, takže je z indukčního předpokladu lze popárovat. Tím bylo tvrzení dokázáno.



Úloha 2. *Závodní trať* je lomená čára v rovině složená z konečně mnoha orientovaných úseček, z nichž žádné dvě se neprotínají ve svých vnitřních bodech. *Zatáčka* je bod, který je koncovým bodem jedné z těchto úseček a počátečním bodem té následující. Zatáčka B mezi orientovanými úsečkami $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ je *pravotočivá*, pokud má řidič formule jedoucí z A do B bod C po pravé ruce. Analogicky definujeme *levotočivou* zatáčku.

V rovině je dáno n bodů v obecné poloze. Kuba by chtěl postavit závodní trať složenou z $n-1$ orientovaných úseček, jejichž krajními body je právě těchto n bodů. Lenka mu zadala posloupnost délky $n-2$ složenou ze znaků R, L, kde R značí pravotočivou a L levotočivou zatáčku. Dokaž, že Kuba dovede body propojit závodní tratí tak, aby pravotočivost či levotočivost jejích zatáček přesně odpovídala posloupnosti, kterou Lenka zadala. (*i*KS, 9. ročník, C5)

Úloha 3. Mějme $n \geq 3$ bodů v rovině, přičemž žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Uvažujme vnitřní úhly všech trojúhelníků s vrcholy v daných bodech a velikost nejmenšího takového úhlu označme φ. Pro dané n najdi největší možné φ. (MO 64 A–II–4)

Úloha 4. V rovině jsou dány úsečky, z nichž se žádné dvě neprotínají (ani v krajních bodech). Řekneme, že úsečka AB *rozbíjí* úsečku CD, pokud prodloužení úsečky AB na polopřímku protíná CD ve vnitřním bodě. Je možné, aby každá zadaná úsečka rozbíjela při prodloužení na obě strany nějakou jinou zadanou úsečku? (IGO 2018)

Úloha 5. Nechť S je konečná množina bodů v rovině. Pro každé tři různé body $A, B, C \in S$, které nejsou na jedné přímce, leží v S i střed kružnice opsané ABC. Dokaž, že všechny body S leží na jedné přímce.

Úloha 6. V rovině je dáno $2n$ bodů v obecné poloze, $n > 1$. Z nich je n obarveno modře a n červeně. Přímka se nazývá *vyrovnaná*, pokud prochází jedním modrým a jedním červeným bodem a počet modrých bodů na jedné straně od ní je stejný jako počet červených bodů na této straně. Dokaž, že existují alespoň dvě vyrovnané přímky. (USAMO 2005)

Úloha 7. Najdi všechny konečné množiny S alespoň tří bodů v rovině takové, že pro každé dva různé body A a B z S je osa úsečky AB osou symetrie S. (IMO 1999)

Trocha formalit

Dosud jsme pracovali téměř výhradně v rovině. Nyní už se ale vzneseme i do vyšších dimenzí. Tam už si bude ale těžké věci představovat. Intuici budeme pořád opírat o to, co si umíme představit, tedy o dvou nebo třídimenzionální prostor. Abychom ale pořádně dokázali něco i ve vyšších dimenzích, potřebujeme si zavést způsob, jak s body pracovat. Jak třeba poznáme, že nějaké body leží na přímce nebo že bod leží uvnitř daného útvaru? Než si na tyto otázky odpovíme, musíme udělat ještě trochu práce.

Ve zbytku tohoto dílu seriálu budeme sčítat hodně čísel, někdy něčím vynásobených. Zavedeme si proto trochu značení. Součet čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ budeme značit $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Toto značení můžeme použít i se složitějšími výrazy závisejícími na i než a_i, třeba s různými součiny, podíly atd. Také se nám může hodit brát i ne od 1 do n, ale z nějaké množiny M. To budeme značit $\sum_{i \in M} a_i$. Kdyby se nám stalo, že M je prázdná množina, definujeme tento součet jako 0.

Narážíme na otázku, jak pracovat s body v mnoha dimenzích. Odpověď je jednoduchá, zavedeme si souřadnicový systém a místo bodů budeme pracovat s takzvanými *vektory*. Vektor a bod pro nás vlastně budou reprezentovat úplně ten stejný objekt, v kontextu našeho seriálu tedy můžeme tyto pojmy skoro libovolně zaměňovat.

Definice. *Vektorem* $v \in \mathbb{R}^d$ rozumíme uspořádanou d-tici čísel

$$(v_1, v_2, \ldots, v_d).$$

Na vektorech není nic složitého a můžeme s nimi pracovat velmi jednoduše. Můžeme je spolu sčítat (a odčítat) nebo je násobit (a dělit) reálným číslem. Vektory mezi sebou ovšem nemůžeme násobit[1].

Definice. Pro vektory $u, v \in \mathbb{R}^d$ definujeme jejich *součet*

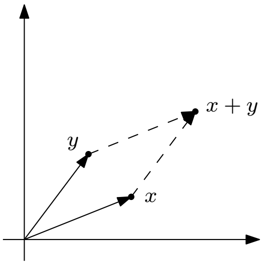
$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_d + v_d)\,.$$

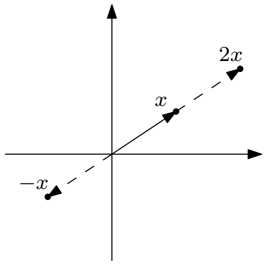
Definice. Pro vektor $v \in \mathbb{R}^d$ a reálné číslo $c \in \mathbb{R}$ definujeme jejich *součin*

$$cv = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_d)\,.$$

Vektor odpovídající bodu x můžeme interpretovat jako šipku, která ukazuje z počátku do x. Je to vlastně posunutí, které zobrazí počátek na x. Sčítání dvou vektorů potom odpovídá složení těchto dvou posunutí – nakreslení šipek za sebe. Násobení reálným číslem je potom prodlužování a zkracování této šipky (násobení záporným číslem odpovídá šipce ukazující opačným směrem).

[1] Dobře, tohle není úplně pravda – možná už jsi někdy potkal(a) skalární nebo vektorový součin. My se jimi ale zabývat nebudeme.





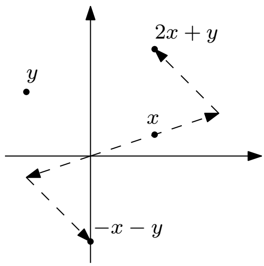
Kombinace

Teď si ještě definujeme tři velmi podobné pojmy. Ze začátku to možná bude trochu matoucí, ale ničeho se nelekej, všechny mají jednoduchou geometrickou interpretaci a brzo by mělo být jasné, proč potřebujeme všechny.

Definice. Nechť $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^d$ jsou body a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ jsou reálná čísla, potom bod

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

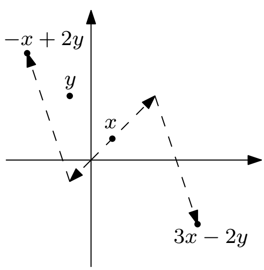
nazveme *lineární kombinací* bodů $x_1, \ldots, x_k$.



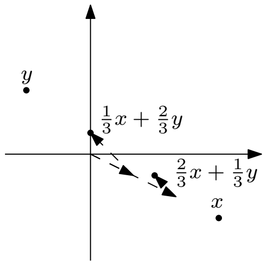
Definice. Jestliže v lineární kombinaci navíc platí

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

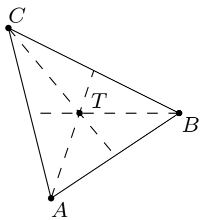
budeme jí říkat *afinní* kombinace.

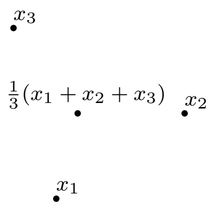


Definice. Jestliže v afinní kombinaci navíc platí $\lambda_i \geq 0$ pro všechna λ_i, budeme jí říkat *konvexní* kombinace.



Máme tedy tři různé možnosti, jak kombinovat body, přičemž se liší množstvím požadavků, které na tuto kombinaci klademe. Dobrý způsob, jak se dívat na afinní a konvexní kombinace, je vážení bodů. U afinních kombinací to může být trochu matoucí, protože váhy mohou být i záporné. V případě konvexních kombinací je tato interpretace ale docela přirozená – nejspíš ses s ní už setkal(a), třeba těžiště trojúhelníka je jenom průměr jeho vrcholů.





Obaly

Důležitý pojem, který s kombinacemi bodů souvisí, jsou obaly.

Definice. Lineárním/afinním/konvexním *obalem* množiny X rozumíme množinu všech konečných[2] lineárních/afinních/konvexních kombinací těchto bodů.

Konvexní obaly jsme už potkali v první polovině tohoto dílu, zatím ale není moc jasné, že tato nová definice odpovídá naší dřívější intuici.

Pojďme se podívat na příklady obalů ve dvou dimenzích. Začněme jednoduše, jenom s jednoprvkovou množinou $X = \{x_1\}$. U afinního a konvexního obalu nemáme co vymýšlet, musíme zvolit $\lambda_1 = 1$, takže afinní i konvexní obal množiny X je zase X. S lineárním obalem je to trochu složitější, tam může být λ_1 libovolné. Když se na bod x_1 podíváme jako na šipku z počátku, můžeme dostat libovolný násobek této šipky. To je přece přímka procházející počátkem a x_1. Nojo, ale co kdyby bod x_1 ležel v počátku? Potom bude lineární obal jenom počátek, tedy zase X.

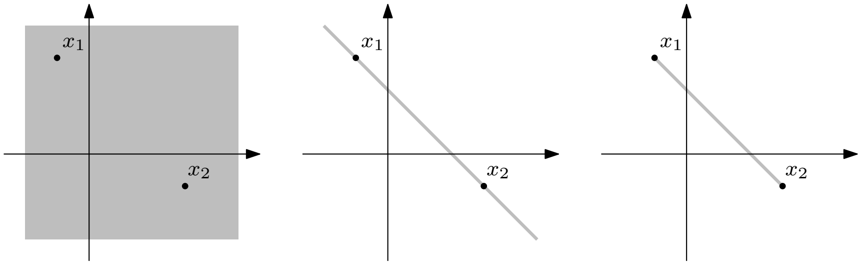
Co když bude X dvouprvková? Nechť tedy $X = \{x_1, x_2\}$. Nejprve se podíváme na afinní obal X. Víme, že pro afinní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ platí $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, můžeme ji tedy upravit následujícím způsobem:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 - (1 - \lambda_1)x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1).$$

Rozdíl $x_2 - x_1$ můžeme interpretovat jako vektor, tedy jako posunutí zobrazující x_1 na x_2. Libovolný násobek tohoto vektoru přičítáme k x_1, tedy dostáváme přímku. Konvexní obal je omezen tím, že $\lambda_2 \geq 0$, čímž vyřadíme body mimo polopřímku $x_1 x_2$, a $\lambda_1 \geq 0$, čímž zase vyřadíme body mimo

[2]Tímto jenom chceme zdůraznit, že sčítáme jenom konečný počet bodů.

polopřímku x_2x_1. Zbyde nám proto jen úsečka x_1x_2 včetně krajních bodů. S lineárním obalem je to už zase složitější. Když přímka spojující x_1 a x_2 prochází počátkem, tedy bodem $(0,\ldots,0)$, dostaneme jenom tuto přímku, v opačném případě bude lineárním obalem celá rovina.



Lineární obal — Afinní obal — Konvexní obal

Na lineárním obalu je nepříjemné, že závisí na tom, kde je počátek. Potíž je v tom, že obvykle máme nějakou množinu bodů bez počátku a chtěli bychom, aby bylo jedno, kde si ho zvolíme. Z pohledu kombinatorické geometrie tedy budou užitečnější afinní a konvexní kombinace. Ty totiž na volbě počátku nezávisí, jak naznačují následující cvičení.

Cvičení 3. Rozmysli si, že lineární obal množiny X je stejný jako afinní obal $X \cup \{O\}$, kde O značí počátek soustavy souřadnic.

Cvičení 4. Rozmysli si, že pokud počátek leží v X, pak afinní a lineární obal X splynou.

Už při zkoumání dvouprvkové množiny se trochu ukázalo, že podmínka $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ nám umožňuje přičíst a po kouskách odečíst libovolný bod x:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x).$$

Když za x zvolíme jeden z bodů x_i, vynuluje se nám vektor $x_i - x$. Stejně jako v předcházejících cvičeních se tedy zbavíme podmínky pro afinní kombinaci a zbyde nám místo afinní jen „lineární kombinace, pokud je počátek v x“. Podmínka přidaná navíc v konvexní kombinaci kontroluje, abychom „nevylezli moc daleko“.

Závislosti

Poslední pojem, který potřebujeme, je závislost bodů.

Definice. Množinu bodů X nazveme lineárně/afinně/konvexně *závislou*, jestliže existuje nějaký bod z X, který leží v lineárním/afinním/konvexním obalu zbylých bodů. V opačném případě ji nazveme lineárně/afinně/konvexně *nezávislou.*

Pokud jsi už někdy potkal(a) jinou definici lineární závislosti, můžeš si jako cvičení rozmyslet, že je ekvivalentní :-).

Cvičení 5. Dokaž, že jestliže je množina bodů konvexně závislá, je i afinně závislá.

Cvičení 6. Dokaž, že jestliže je množina bodů afinně závislá, je i lineárně závislá.

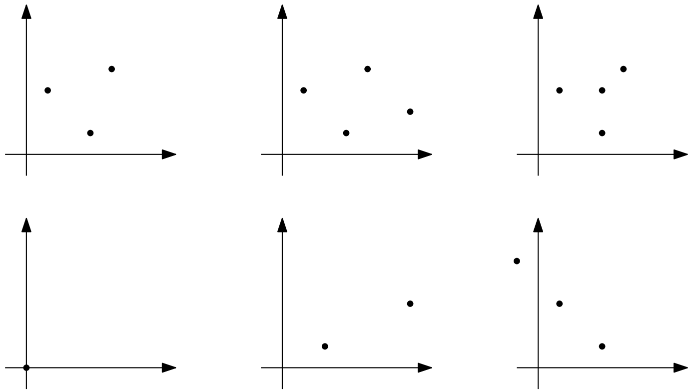
Zmiňme si jedno tvrzení z lineární algebry, které tady nebudeme formálně dokazovat. Ne, že by to bylo těžké, ale moc se to do seriálu nehodí.

Tvrzení. *Libovolných $d + 1$ vektorů z $\mathbb{R}^d$ je lineárně závislých.*

Ze Cvičení 3 potom plyne, že libovolných $d + 2$ vektorů z $\mathbb{R}^d$ je afinně závislých.

Cvičení 7. Platí něco podobného i pro konvexní závislost?

Cvičení 8. Které z následujících množin bodů v rovině jsou lineárně/afinně/konvexně závislé?

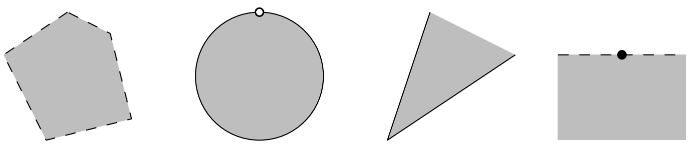


Konvexní množiny

V minulém díle jsme pracovali s konvexními mnohoúhelníky a před chvíli jsi viděl(a) konvexní obaly. Definice konvexní množiny všechny tyto případy zastřešuje. Je to vlastně jen formální způsob, jak říct, že nějaká množina v sobě nemá „díry“ nebo „vykousnutí“.

Definice. Nechť X je podmnožina $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že X je *konvexní*, pokud pro každé dva body x a y z X leží i celá úsečka xy v X.

Pozor na to, že konvexní množiny můžou vypadat divočeji, než bys možná na první pohled čekal(a). V jedné dimenzi je to ještě jednoduché, tam jsou konvexní právě intervaly, mohou být otevřené, uzavřené, nebo polouzavřené. To konkrétně zahrnuje i prázdný interval, jednobodové intervaly a celou přímku. Ve dvou dimenzích, tedy v rovině, už je situace složitější. Teď už nemůžeme všechny konvexní množiny vyjmenovat jako v jednodimenzionálním případě. Uveďme si aspoň několik příkladů, které by Tě nemusely napadnout: mnohoúhelník bez okraje, úhel menší než 180° (proto se mu říká konvexní), kruh bez bodu na hranici, polorovina bez okraje s bodem navíc.



Cvičení 9. Existuje konvexní množina bodů taková, že když z ní odebereme libovolný bod, přestane být konvexní?

Cvičení 10. Dokaž, že průnik libovolného počtu konvexních množin je konvexní.

Cvičení 11. Rozhodni, zda existuje konvexní množina v $\mathbb{R}^d$ taková, že i její doplněk je konvexní.

Nyní si definujeme konvexní obal trochu jinak než v předchozí kapitole a vzápětí si ukážeme, že tyto definice jsou opravdu ekvivalentní.

Definice. Pro množinu X bodů z $\mathbb{R}^d$ označme $\operatorname{conv}(X)$ průnik všech konvexních množin, které X obsahují.

Ze Cvičení 10 plyne, že $\operatorname{conv}(X)$ je konvexní množina.

Tvrzení. *Bod x leží v konvexním obalu množiny bodů X právě tehdy, když leží v* $\operatorname{conv}(X)$.

Důkaz. Rovnost dvou množin se obvykle dobře dokazuje tak, že postupně dokážeme dvě inkluze. Když je první množina podmnožinou druhé a druhá je podmnožina první, musí se množiny rovnat.

Indukcí ukážeme, že všechny konvexní kombinace bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ leží v $\operatorname{conv}(X)$. Pro $n = 2$ to plyne z definice konvexní množiny. Nyní zafixujme konvexní kombinaci n bodů z X a ukážeme, že leží v $\operatorname{conv}(X)$. Nechť tedy $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ a $\lambda_i \geq 0$. Označme $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \geq 0$. Pokud $S = 0$, je tvrzení triviální. Jinak platí

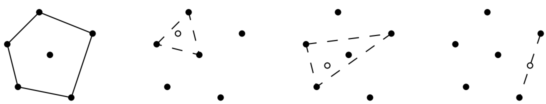
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_n x_n + S \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{S} \cdot x_i.$$

Platí $\frac{\lambda_1}{S} + \frac{\lambda_2}{S} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{S} = \frac{S}{S} = 1$, zároveň $\frac{\lambda_i}{S} \geq 0$, tedy $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{S} \cdot x_i$ je konvexní kombinace $n-1$ bodů z X, a tudíž z indukčního předpokladu leží v $\operatorname{conv}(X)$. Také $\lambda_n + S = 1$, $\lambda_n \geq 0$, $S \geq 0$, tedy $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ leží na úsečce mezi dvěma body z $\operatorname{conv}(X)$. Protože $\operatorname{conv}(X)$ je konvexní množina, leží i tento bod v $\operatorname{conv}(X)$.

Nyní musíme ještě ukázat, že všechny body z $\operatorname{conv}(X)$ leží v konvexním obalu množiny X. Nechť A je konvexní obal X. Množina A obsahuje X a je konvexní. Z definice je tedy $\operatorname{conv}(X)$ obsažen v A, jak chceme. □

Vidíme tedy, že definice jsou ekvivalentní. Můžeme proto značit konvexní obal $\operatorname{conv}(X)$. V následující větě si ukážeme, kolik bodů stačí na vyjádření jednoho jako konvexní kombinace.

Věta. (Carathéodory) *Ať X je množina bodů z $\mathbb{R}^d$. Potom každý bod z* $\operatorname{conv}(X)$ *lze vyjádřit jako konvexní kombinace nejvýše $d+1$ bodů z X.*



Důkaz. Vezměme libovolný bod $x \in \operatorname{conv}(X)$ a ukažme, že pro něj tvrzení platí. Už víme, že x lze vyjádřit jako konvexní kombinace nějakých bodů z X, označme ji

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i. \tag{1}$$

Pokud $n \leq d+1$, vyhráli jsme. Pokud $n > d+1$, zkusíme najít konvexní kombinaci s méně body. Využijeme toho, že bodů je aspoň $d+2$, takže musí být afinně závislé. Jeden z nich tedy umíme vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních, nechť je to BÚNO x_n. Označme tuto kombinaci

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i,$$

pro jednoduchost dále označme $\mu_n = -1$, čímž dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i. \tag{2}$$

Všimni si, že $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$. BÚNO můžeme předpokládat, že jsou všechna μ_i nenulová. Teď budeme chtít rovnice (1) a (2) sečíst tak, aby se nám vynuloval nějaký koeficient. Zkusme tedy k rovnici

(1) přičíst rovnici (2) přenásobenou α, kde α musíme nějak šikovně zvolit. Chceme při tom získat novou konvexní kombinaci, takže všechny koeficienty výsledku by měly být nezáporné. Ukáže se, že správnou volbou je

$$\alpha = \min_{\mu_i < 0} \left(-\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right).$$

Jinými slovy $\alpha = -\frac{\lambda_j}{\mu_j}$, kde j zvolíme tak, aby α byla kladná a zároveň co nejmenší. Sečtením daných rovnic nyní získáme

$$x + \alpha \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i,$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha \mu_i) x_i.$$

Na indexu j dostáváme

$$\lambda_j + \alpha \mu_j = \lambda_j - \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot \mu_j = 0.$$

Zároveň jsou všechny koeficienty nezáporné, protože pro kladné μ_i platí

$$\lambda_i + \alpha \mu_i \geq \lambda_i \geq 0$$

a pro záporné μ_i platí

$$\lambda_i + \alpha \mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot \mu_i \geq \lambda_i - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \cdot \mu_i = 0.$$

Zároveň ovšem

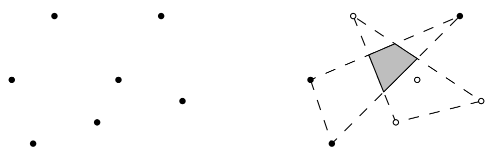
$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 + \alpha \cdot 0 = 1.$$

Máme novou konvexní kombinaci, která obsahuje o jedna méně bodů (ten s nulovým koeficientem můžeme zahodit), takže jsme hotovi. $\square$

Pro lepší náhled si rozmyslíme, co Carathéodoryho věta říká pro menší dimenze. Konkrétně na přímce a v rovině (pro $d = 1$ a $d = 2$) se může zdát, že je tvrzení skoro triviální. Pozor ale na to, že množina X může být nekonečná, což situaci značně komplikuje.

Úloha 8. Mějme množinu bodů X v prostoru, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině. Dokaž, že když každých pět bodů z X tvoří vrcholy konvexního mnohostěnu, tak i celá množina X tvoří vrcholy konvexního mnohostěnu.

Věta. (Radonovo lemma) *Nechť A je množina aspoň $d + 2$ bodů v $\mathbb{R}^d$. Potom existují její dvě disjunktní podmnožiny A_1 a A_2, jejichž konvexní obaly se protínají.*



Za chvíli si ukážeme důkaz pro obecné d. Zkus si to ale nejdřív rozmyslet v rovině.

Cvičení 12. Dokaž Radonovo lemma pro $d = 2$.

Cvičení 13. Mohli bychom požadovat, že A_1, A_2 jsou neprázdné. Rozmysli si, proč to není potřeba.

Důkaz. Nechť je bodů právě $d+2$, kdyby kdyby jich bylo víc, jenom nám to pomůže. Stejně jako v Carathéodoryho větě využijeme toho, že bodů je hodně, takže mezi nimi existují nějaké závislosti. Víme, že jsou afinně závislé, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+2}$, z nichž alespoň jedno je nenulové, $\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i = 0$ a

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i x_i = 0.$$

Nechť A_1 je množina těch i od 1 do $d+2$, pro něž $\alpha_i \geq 0$, A_2 jsou ostatní. Tvrdíme, že toto už nám stačí. Označme β_i absolutní hodnotu α_i pro $i \in A_2$. Potom platí

$$\sum_{i \in A_1} \alpha_i x_i = \sum_{i \in A_2} \beta_i x_i.$$

To je skoro to, co chceme, protože na každé straně je lineární kombinace s nezápornými koeficienty. Ještě ale potřebujeme, aby součet koeficientů byl 1. Protože ale $\alpha_i + \cdots + \alpha_n = 0$, platí $\sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} \beta_i$. Označme tento součet S. Potom

$$\sum_{i \in A_1} \frac{\alpha_i}{S} x_i = \sum_{i \in A_2} \frac{\beta_i}{S} x_i$$

jsou už opravdu konvexní kombinace. Protože alespoň jedno α_i bylo nenulové, musí být nějaké α_i kladné a nějaké záporné, aby se posčítaly na 0. Množiny A_1 a A_2 jsou tedy neprázdné množiny a důkaz je hotov. □

Věta. (Helly) *Nechť $n \geq d+1$ a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^d$. Předpokládejme, že průnik každých $d+1$ těchto množin je neprázdný. Potom je průnik všech těchto množin neprázdný.*

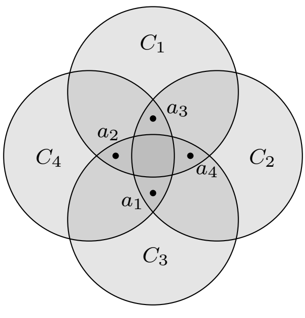
Než se pustíme do důkazu, hodí se získat určitou intuici za formulací věty.

Cvičení 14. Rozmysli si, proč musí platit $n \geq d+1$.

Cvičení 15. Najdi nekonvexní množiny, pro něž Hellyho věta neplatí.

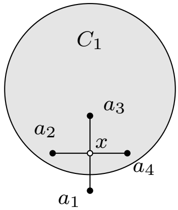
A nyní hurá na důkaz!

Důkaz. Vezmeme si pevné d a budeme postupovat indukcí podle počtu množin. Pro $n = d+1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme nyní $n = d+2$. Pokud vynecháme nějakou množinu C_i, mají zbylé neprázdný průnik. Můžeme si proto z něj vzít nějaký bod a_i, označme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{d+2}\}$. Pro každé j pak platí, že body A kromě a_j leží v C_j.



$\{a_2, a_3, a_4\} \subseteq C_1$

Protože C_j je konvexní, leží i konvexní obal libovolné podmnožiny těchto bodů v C_j. Pokud bychom vzali libovolný bod z $\mathrm{conv}(A)$, nemusel by ležet v C_j. Jakmile ale rozdělíme A na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny A_1 a A_2 a vezmeme bod x z $\mathrm{conv}(A_1) \cap \mathrm{conv}(A_2)$, bude x ležet v C_j. To proto, že a_j může ležet jen v jedné z množin A_1 a A_2, takže konvexní obal té druhé bude podmnožinou C_j. Na tuto situaci ale máme přesně nachystané Radonovo lemma. Vyhovující podmnožiny A, které budou mít neprázdný průnik, tedy určitě najdeme.



$$\mathrm{conv}(\{a_1, a_3\}) \cap \mathrm{conv}(\{a_2, a_4\}) \neq \emptyset$$
$$x \in \mathrm{conv}(\{a_2, a_4\}) \subseteq C_1$$

Zbývá už jen případ, kdy $n > d + 2$. Předpokládejme, že pro $n - 1$ jsme tvrzení již dokázali. Již víme, že každých $d+2$ zadaných množin má neprázdný průnik. Pokud tedy dvě množiny nahradíme jejich průnikem, bude stále platit, že každých $d + 1$ množin má neprázdný průnik. Zároveň máme o jednu množinu méně, takže můžeme použít indukční předpoklad a průnik všech těchto $n - 1$ množin je neprázdný. Je to ovšem i průnik původních n množin, čímž je indukce hotova. □

Úloha 9. Řekneme, že konečná množina bodů v rovině je *pospolitá*, pokud pro každé tři její body existuje jednotkový kruh, který tyto body obsahuje. Dokaž, že každou pospolitou množinu lze pokrýt jednotkovým kruhem. (PraSe 40–4j–4b)

Mohlo by Tě napadnout, že když Hellyho věta platí pro hodně množin, kterých je ale konečně, mohla by platit i pro nekonečně množin. Skutečně nekonečná verze Hellyho věty existuje, avšak je potřeba přidat pár dalších omezení.

Věta. (Nekonečný Helly) *Hellyho věta platí i pro nekonečně mnoho množin, jestliže jsou všechny navíc uzavřené a omezené.*

Na důkaz nekonečné Hellyho věty bychom potřebovali zavést docela dost další teorie[3]. Věta zmiňuje uzavřené množiny, což v podstatě znamená „množiny s okrajem“. Omezené zase znamená, že se neroztahují do nekonečna (můžeme je zavřít do krabice). Jednoduchým příkladem takových množin v d dimenzích jsou třeba konvexní mnohostěny[4].

Následující cvičení ukazují, proč je omezenost a uzavřenost množin potřeba. Protipříklad totiž můžeme najít už v jednom rozměru.

Cvičení 16. Najdi množinu intervalů, které jsou uzavřené a každé dva mají neprázdný průnik, ale všechny neprázdný průnik nemají.

Cvičení 17. Najdi množinu intervalů, které jsou omezené a každé dva mají neprázdný průnik, ale všechny neprázdný průnik nemají.

Úloha 10. Lenka nakreslila na papír křivku a všimla si, že vzdálenost libovolných dvou jejích bodů je nejvýše 1. Dokaž, že Lenka může namalovat čtverec o straně 1, který zakryje celou křivku.

---

[3]Důkaz využívá věty o kompaktnosti, která nám (za určitých podmínek) dovoluje říct „platí to pro všechny konečné množiny, tak to bude platit i pro všechny nekonečné“.

[4]Konvexní mnohostěn ve více dimenzích můžeme definovat například jako konvexní obal konečné množiny bodů.

Závěr

Doufáme, že sis výlet do světa konvexních množin s námi užil(a). V příštím díle využijeme nabytých poznatků a zobecníme pojem mediánu[5] do více dimenzí.

Těšíme se na příští setkání. Majda a Pepa

Návody ke cvičením

1. To zvládneš.

2. Zvol body jako vrcholy pravidelného mnohoúhelníka.

3. Co se stane, když něčím vynásobíš nulový vektor (tj. vektor samých nul)?

4. Použij předchozí cvičení.

9. Ano, existuje.

12. Jsou jen dva případy.

16. Musí být neomezené. Intervaly tvaru $[k, \infty)$ jsou uzavřené.

17. Musí být otevřené. Vezmi nějaký bod, který je krajním bodem všech těchto intervalů.

Návody k úlohám

1. Uvaž nějaké dva po sobě jdoucí body na konvexním obalu.

2. Umíš vyrobit alespoň jednu zatáčku na správnou stranu? O čem je tato kapitola?

4. Není. Přelož rozbíjení do řeči konvexních obalů.

5. Kdy je střed kružnice opsané mimo trojúhelník? Jaký je u něj úhel?

6. Začni na konvexním obalu a zametej.

7. Fungují jen pravidelné n-úhelníky.

8. Přímočará aplikace Caratheodoryho věty, postupuj sporem.

9. Podívej se na kruhy o poloměru 1 se středem v zadaných bodech.

10. Pro tři čtverce s rovnoběžnými stranami platí, že když se každé dva z nich protínají, protínají se i všechny tři.

Řesení cvičení

1. Nejméně tři, nejvíce n.

2. Body umístíme do vrcholů pravidelného 4027úhelníku. Barvy se budou pravidelně střídat kromě dvou modrých bodů, co budou vedle sebe. Na obvodu tohoto mnohoúhelníka je nyní 4026 dvoubarevných úseček. Aby byly body správně oddělené, musí být každá z těchto úseček přerušena přímkou. Každá přímka ale může přerušit maximálně 2 úsečky, takže potřebujeme aspoň 2013 přímek.

[5] Medián je prostřední prvek.

3. Mějme lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ bodů z X. Přičtením $\big(1-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\big)$-násobku počátku se součet nezmění, avšak rázem se z kombinace stane afinní.

4. Když $O \in X$, platí $X = X \cup \{O\}$, tedy stačí použít předchozí cvičení.

5. Každá konvexní kombinace je také afinní kombinací, tedy umíme-li jeden bod vyjádřit jako konvexní kombinaci ostatních, umíme ho vyjádřit i jako afinní kombinaci ostatních.

6. Každá afinní kombinace je také lineární kombinací, tedy umíme-li jeden bod vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních, umíme ho vyjádřit i jako lineární kombinaci ostatních.

7. Ne. Například pro libovolné n jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku konvexně nezávislé.

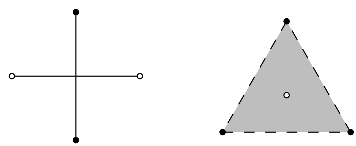
8. Očíslujme množiny zleva doprava, seshora dolů od 1 do 6. Konvexně závislé jsou množiny 3 a 6. Afinně závislá je navíc i množina 2, protože to jsou čtyři množiny v rovině. Lineárně závislé jsou i všechny tři zbylé množiny. Množina 1 proto, že jsou to tři body v rovině. Množina 5 proto, že to jsou dva body na přímce s počátkem. Množina 4 proto, že součet přes prázdnou množinu je nulový vektor, tedy samotný počátek je lineárně závislý. Díky podmínkám na součet koeficientů už ale není ani afinně, ani konvexně závislý.

9. Třeba přímka.

10. Ať I množina, kterou budeme indexovat dané konvexní množiny (můžou to být třeba i reálná čísla). Chceme ukázat, že průnik konvexních množin C_i, $i \in I$, je neprázdný. Pokud body x a y leží v tomto průniku, leží speciálně v C_i pro nějaké $i \in I$. Protože C_i je konvexní, leží v C_i i úsečka xy. To platí pro všechna $i \in I$, tedy tato úsečka leží v průniku. To přesně znamená, že průnik je konvexní.

11. Vyhovuje například prázdná množina.

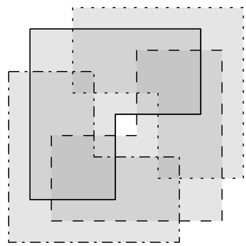
12. Z kombinatorického hlediska mají čtyři body v rovině jen dvě možné konfigurace:



13. Konvexní obal prázdné množiny je zase prázdná množina, takže kdyby jedna z množin A_1, A_2 byla prázdná, konvexní obaly by se rozhodně neprotínaly.

14. Pro menší n nemáme ani $d+1$ množin, tedy podmínka nic neříká a množiny mohou být klidně disjunktní.

15. Fungují třeba čtyři množiny ve tvaru písmene „L“, každá jinak otočená.

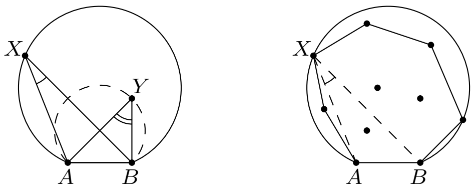


16. Vyhovuje množina $\{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

17. Vyhovuje množina $\{\big(0, \frac{1}{n}\big) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Řesení úloh

1. Uvažme dva po sobě jdoucí body na konvexním obalu, označme je A a B. Ze zbylých bodů nyní vyberme bod X takový, že velikost úhlu AXB je minimální. Kružnice opsaná AXB nyní obsahuje všechny ostatní body uvnitř nebo na hranici. Všechny ostatní body totiž leží v jedné polorovině, a navíc vidí úsečku AB pod větším úhlem. Teď se nám hodí trocha znalostí z klasické geometrie, konkrétně následující tvrzení (plynoucí z věty o obvodovém úhlu). Jestliže body X a Y leží ve stejné polorovině vůči úsečce AB, potom je $|\sphericalangle AXB| \leq |\sphericalangle AYB|$ ekvivalentní tomu, že Y leží uvnitř kružnice opsané AXB. Tím je tvrzení dokázáno.



2. Úlohu vyřešíme indukcí podle počtu úseček na trati. Dokonce budeme dokazovat trochu silnější tvrzení – ukážeme, že trať může začít kdekoli na konvexním obalu. Pro jednu úsečku na trati nejsou zatáčky, takže tvrzení určitě platí. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1$ a dokažme jej pro n. Volbou první úsečky zařídíme, aby první zatáčka byla správně levotočivá či pravotočivá a aby se tato úsečka neprotnula s žádnou později postavenou. Začneme v kterémkoli vrcholu konvexního obalu daných bodů. Úsečku povedeme do některého ze dvou sousedních vrcholů na obalu. Tím zajistíme, že v dalším kroku budeme začínat opět na konvexním obalu bodů, které ještě nebyly v závodní trati. Také tím zajistíme, aby se tato úsečka s žádnou další neprotnula. Volbou směru této úsečky jednoznačně určíme, jestli další zatáčka bude pravotočivá, nebo levotočivá – když úsečku uděláme po směru hodinových ručiček, další zatáčka bude pravotočivá, když proti směru, bude zatáčka levotočivá. Stačí nám tedy správně zvolit směr první úsečky a zbytek platí z indukce.

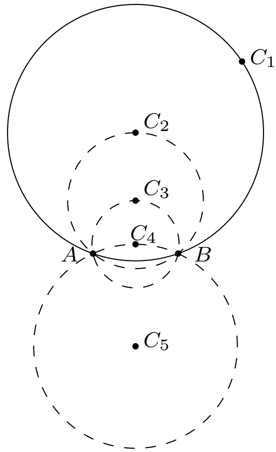
3. Dokážeme, že odpověď je $\frac{180^\circ}{n}$. Vezměme dva sousední body na konvexním obalu A a X_1. Ostatní body označíme $X_2, \ldots, X_{n-1}$, aby v konvexním úhlu X_iAX_{i+1} nebyly žádné další (otáčíme přímkou v bodě A, body označujeme v pořadí, v němž je potkáme). Všechny body leží v jedné polorovině od AX_1. Tudíž víme $|\sphericalangle X_1AX_{n-1}| = |\sphericalangle X_1AX_2| + \cdots + |\sphericalangle X_{n-2}AX_{n-1}| \geq (n-2)\cdot\varphi$ a také $180^\circ - |\sphericalangle X_1AX_{n-1}| = |\sphericalangle X_1X_{n-1}A| + |\sphericalangle X_{n-1}X_1A| \geq 2\cdot\varphi$. Dohromady dostáváme

$$180^\circ = |\sphericalangle X_1AX_{n-1}| + 180^\circ - |\sphericalangle X_1AX_{n-1}| \geq n\cdot\varphi,$$

z čehož máme horní odhad. Jako konstrukce postačí pravidelný n-úhelník.

4. Pro spor uvažme konvexní obal koncových bodů zadaných úseček, vezmeme jeden z koncových bodů, který na něm leží, a označíme ho A. Ať AB je zadaná úsečka. Kdyby polopřímka BA rozbíjela úsečku CD, ležel by bod A uvnitř konvexního obalu BCD. To je spor s tím, že ležel na konvexním obalu všech bodů.

5. Pro spor nechť existují tři body S, které neleží na přímce. Potom můžeme uvážit konvexní obal S a vzít na něm dva sousední body A a B. Také existuje nějaký další bod $C_1 \in S$, který s A a B neleží na přímce. Nyní rekurzivně definujeme $C_{n+1} \in S$ jako střed kružnice opsané ABC_n. Víme, že $|\sphericalangle AC_{n+1}B| = 2\cdot|\sphericalangle AC_nB|$. Pro nějaké k tedy bude platit $|\sphericalangle AC_kB| > 90^\circ$, takže C_{k+1} bude ležet v opačné polorovině od AB než C_k. To je ale spor s tím, že A a B jsou sousední body na konvexním obalu.



6. Pokud jsou na konvexním obalu body obou barev, existují na něm alespoň dvě místa, kde po sobě následuje modrý a červený bod. Potom nám stačí vzít přímku skrze tyto dva body, protože na jedné straně bude mít 0 modrých a 0 červených bodů, na druhé $n-1$ modrých a $n-1$ červených. Dále nechť jsou na konvexním obalu jen body jedné barvy, třeba modré. Potom si můžeme vybrat jeden z nich a otáčet v něm přímkou. Stejně jako v příkladu o párování černých a bílých bodů ukážeme, že lze najít vyrovnanou přímku. Začneme-li s jiným bodem na konvexním obalu, dostaneme určitě jinou vyrovnanou přímku, takže opět máme alespoň dvě.

7. Body na konvexním obalu S označíme postupně $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Potom A_i musí ležet na ose $A_{i-1}A_{i+1}$, jinak by jeho obraz nebyl v konvexním obalu S. Tedy všechny strany $A_1A_2\ldots A_k$ jsou stejně dlouhé. Také A_i musí být obraz A_{i+1} podle osy $A_{i-1}A_{i+2}$, takže všechny úhly k-úhelníku jsou stejně velké. Tím pádem $A_1A_2\ldots A_k$ musí být pravidelný k-úhelník.

Nyní označíme O střed $A_1A_2\ldots A_k$. Body z konvexního obalu se musí zobrazit opět na konvexní obal, takže každá osa symetrie S musí být i osou symetrie $A_1A_2\ldots A_k$. Pro každý bod $X \in S$ musí tudíž O ležet na ose XA_1 i XA_2, takže X leží na kružnici opsané $A_1A_2\ldots A_k$. Tedy už je to nutně jeden z bodů A_i.

8. Pro spor nechť celá množina X netvoří vrcholy konvexního mnohostěnu. To znamená, že nějaký její bod je v konvexním obalu ostatních. Podle Carathéodoryho věty jej můžeme vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše čtyř dalších bodů. Tím jsme ale dostali bod uvnitř konvexního obalu čtyř jiných, takže těchto pět bodů dohromady nemůže tvořit konvexní mnohostěn.

9. Podíváme se na kruhy o poloměru 1 se středem v zadaných bodech, kruh se středem x označíme C_x. Podmínka, že každé tři body lze pokrýt jednotkovým kruhem, vlastně říká, že pro každé tři body a, b, c se C_a, C_b a C_c protínají v alespoň jednom bodě. Kruh je konvexní množina, takže můžeme použít Hellyho větu. Z toho dostaneme, že se všechny kruhy protínají v alespoň jednom bodě, který vezmeme za střed jednotkového kruhu, který bude pokrývat všechny body.

10. Pro každý bod x Lenčiny křivky uvažme čtverec o straně 1 se středem v x, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Podle podmínky na vzdálenosti se každé dva čtverce musí protínat. To zatím na použití nekonečné Hellyho věty nestačí. Jednoduchým rozborem případů ale můžeme dokázat, že se musí protínat i každé tři. Čtverce jsou uzavřené a omezené, takže můžeme aplikovat nekonečnou Hellyho větu. Všechny čtverce mají společný bod, stačí nám tedy uvážit čtverec o straně jedna se středem v tomto bodě a jsme hotovi.