Kombinatorická geometrie I – Všehochuť

Milý příteli,
do rukou se Ti dostává první díl letošního seriálu, v němž si povíme o oblasti matematiky zvané kombinatorická geometrie. V klasické geometrické úloze většinou dostaneme zadanou konfiguraci, která obsahuje několik málo bodů, přímek a kružnic, a máme třeba ukázat, že nějaké úhly nebo úsečky jsou shodné. V kombinatorické geometrii většinou pracujeme s mnohem obecnějšími konfiguracemi – typicky dostaneme nějakou množinu n bodů nebo n přímek v rovině. Takové n může být daleko víc, než kolik bodů si dokážeme nakreslit. A tak naším úkolem nebude si vzít barvičky a začít vyznačovat všechny shodné úhly, protože to většinou ani nepůjde. Spíš bude potřeba vymyslet, jak si ve všech těch bodech udělat pořádek, aby se ze zběsilé hromady stalo něco uchopitelného. Třeba si z té hromady vezmeme jen něco nebo z ní budeme brát věci ve správném pořadí. Jak už asi začínáš tušit, kombinatorická geometrie má ve skutečnosti mnohem blíž ke kombinatorice než ke geometrii. Přestože pracujeme s geometrickými objekty, úlohy budeme řešit kombinatorickými úvahami. Tak zahoď úhloměr a pravítko a pojď na to!

Kdyby sis nevěděl(a) rady s nějakou úlohou, nebyl by Ti jasný nějaký důkaz nebo by sis prostě jen chtěl(a) popovídat o kombinatorické geometrii, neváhej nám napsat mail na adresy *pepa@prase.cz* a *magdalena.misinova@gmail.com*.

Podnětné čtení Ti přejí

Pepa Minařík a Majda Mišinová

Jak číst seriál

V tomto díle seriálu si nebudeme dokazovat žádné složité věty, ale ukážeme si několik technik, které mohou být užitečné k řešení úloh. V každé sekci nejdříve najdeš krátký popis dané metody a potom řešené **příklady**. Vřele doporučujeme, aby ses nad příklady nejdřív chvilku zamyslel(a) sám (sama) a až potom si přečetl(a) řešení. I když příklad nevyřešíš, získáš nějakou intuici za tím, v čem je vlastně problém, a řešení potom bude dávat větší smysl.

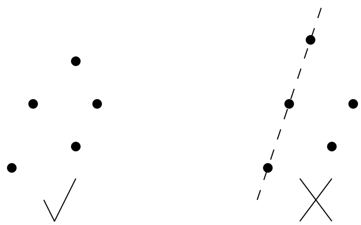
Někdy nemusí být jasné, jak jsme na řešení přišli a proč Tě mělo napadnout udělat zrovna tohle. Nenech se tím ale odradit, čím více úloh vyřešíš, tím snadněji Tě napadne, jaký trik zrovna použít. Po řešených příkladech obvykle následuje několik **Úloh** na procvičení. Kdyby sis s nějakou nevěděl(a) rady, na konci dílu najdeš nápovědu a řešení. Tato řešení nemusí být úplně podrobná, věříme, že potřebné detaily si zvládneš doplnit. Do soutěžní série ale tyto detaily napsat nezapomeň. Kromě úloh se v textu objeví i pár **Cvičení**. Cvičení by obvykle měla být relativně přímočará a jejich řešení nemusí nutně využívat aktuálně probíranou techniku.

Definice

Než se pustíme do řešení úloh, pojďme si definovat několik pojmů. Nebude to nic složitého, jenom se hodí si je ujasnit.

Mnoho úloh pracuje s množinou bodů v rovině. Často se vyžaduje, aby žádné tři neležely na přímce. To může být z různých důvodů – obvykle se tím vyhneme potřebě řešit ošklivé speciální případy a někdy by bez této podmínky úloha ani neplatila.

Definice. O množině bodů v rovině říkáme, že je v *obecné poloze*, jestliže žádné tři z nich neleží na jedné přímce.

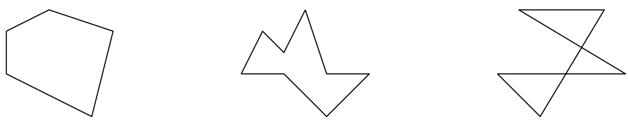


Co je mnohoúhelník asi každý ví, ale pojďme si ho přece jen definovat trochu formálněji.

Definice. *Mnohoúhelníkem* nebo *n-úhelníkem* $A_1A_2\dots A_n$ rozumíme množinu bodů tvořících úsečky A_1A_2, A_2A_3, $\dots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, kde $A_i \neq A_j$ pro $i \neq j$ a úsečky se protínají pouze v krajních bodech.

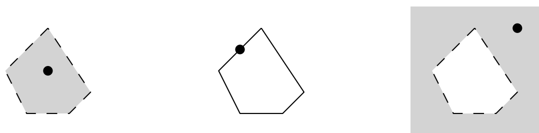
Definice. Mnohoúhelník je *konvexní*, jestliže jsou všechny jeho vnitřní úhly menší než $180°$.

Konvexitou se budeme hodně zabývat v druhém díle seriálu. O mnohoúhelnících nepředpokládáme, že jsou konvexní, pokud to explicitně nenapíšeme. Chceme-li zdůraznit, že mnohoúhelník nemusí být konvexní, řekneme, že je *ne nutně konvexní*. V definici explicitně zakazujeme protínání stran, občas je ale vhodné tuto podmínku z definice vynechat, pokud to ale uděláme, vždy to zdůrazníme.



Konvexní Nekonvexní Protínající se

Budeme rozlišovat, jestli bod (nebo jiný objekt) leží *uvnitř*, nebo *na hranici* mnohoúhelníku. Když bod leží uvnitř, znamená to, že **ne**může ležet na hranici.



Uvnitř Na hranici Vně

Definice. *Diagonála* mnohoúhelníku je úsečka spojující dva jeho nesousedící vrcholy.

Definice. *Vnitřní* diagonála mnohoúhelníku je taková jeho diagonála, která až na krajní body leží celá uvnitř něj.

U konvexních mnohoúhelníků pojem diagonály a vnitřní diagonály splývá, u nekonvexních je ale důležité mezi nimi rozlišovat.

Extremální princip

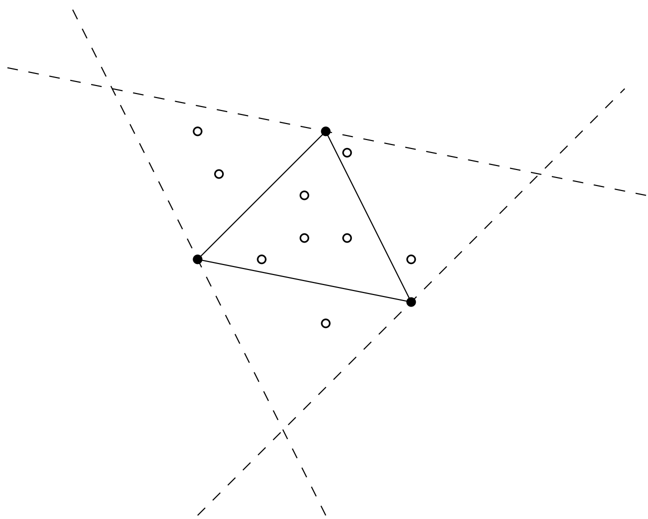
Když je v úloze spousta bodů, vzdáleností a kdo ví čeho, bývá užitečné v ní nějak uklidit. Třeba tak, že se podíváme na jednu vzdálenost a všechno budeme vztahovat k ní. Aby nám to ale dalo co nejvíce, hodí se vybrat si takovou, která je v nějakém smyslu speciální. Co a v jakém smyslu speciálního chceme vybrat, nemusí být na první pohled vůbec jasné. Když máme nějaké objekty v rovině nebo prostoru, můžeme se zaměřit na:

- ten nejmenší/největší,
- ten nejvíc vlevo/vpravo/nahoře/dole,
- ten s nejmenším/největším obsahem/objemem/obvodem,
- nejbližší/nejvzdálenější dvojice,
- největší/nejmenší úhel,
- cokoli dalšího Tě napadne.

Možností je spousta, pojďme si raději ukázat nějaké příklady. Ten následující ukazuje velmi typické využití extremálního principu. Můžeš si rozmyslet, že když uvážíme libovolný trojúhelník, nic moc nám to nedá.

Příklad. V rovině je konečná množina bodů S taková, že každý trojúhelník s vrcholy v S má obsah nejvýše 1. Dokaž, že celá S se dá schovat do trojúhelníku o obsahu 4. (Putnam 2016)

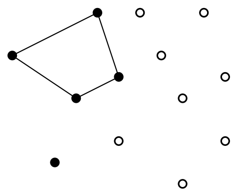
Řešení. Uvažme trojúhelník s vrcholy v S o největším obsahu a označme jeho vrcholy A, B a C. Dokresleme přímku rovnoběžnou s AB procházející vrcholem C. Kdyby nějaký bod D ležel na opačné straně této přímky než body A a B, měl by trojúhelník ABD větší obsah než ABC. Když takto dokreslíme i symetrické rovnoběžky, zjistíme, že vytínají trojúhelník, ve kterém musí ležet všechny body množiny S! Tím jsme ovšem hotovi, protože obsah tohoto trojúhelníku je čtyřnásobek obsahu ABC (trojúhelník ABC je tvořený středními příčkami velkého trojúhelníku).



Následující příklad ukazuje úplně jiný způsob, jak extremální princip využít.

Příklad. Dokaž, že když v rovině leží $n \geq 5$ bodů v obecné poloze, je možné z nich vybrat čtyři tvořící konvexní čtyřúhelník, který uvnitř nemá žádný další bod.

Řešení. Není moc těžké tvrzení dokázat pro $n = 5$. K dokázání tvrzení pro obecné n stačí uvážit pět bodů nejvíce vlevo! Kdyby to nebylo jednoznačné, dáme přednost bodu, co je více nahoře. Mezi pěti body nejvíce vlevo existuje hledaný čtyřúhelník a uvnitř něj nemůže ležet žádný jiný bod.

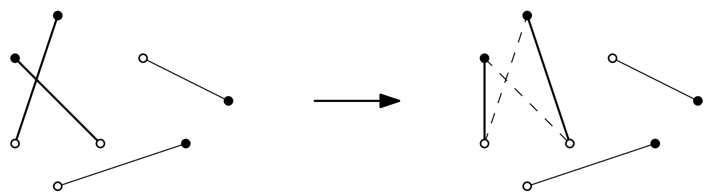


Cvičení 1. Rozmysli si, že tvrzení platí pro $n = 5$.

Někdy může být volba minimalizované veličiny docela triková. Známým příkladem je třeba následující úloha.

Příklad. V rovině leží n černých a n bílých bodů. Dokaž, že je možné popárovat černé body s bílými tak, že se úsečky spojující páry nebudou protínat.

Řešení. Předpokládejme, že jsme popárovali body tak, že je součet délek úseček spojujících páry minimální. Co kdyby se nějaké dvě úsečky protínaly? Potom bychom mohli tyto páry prohodit a z trojúhelníkové nerovnosti bude součet vzdáleností menší. To znamená, že když je součet vzdáleností nejmenší, žádné dvě úsečky se nemůžou protínat!



Úloha 1. Je dáno $n \geq 3$ bodů v rovině obarvených třemi barvami tak, že každá barva je zastoupena. Dokaž, že lze vybrat tři body, od každé barvy jeden, aby uvnitř trojúhelníku s těmito vrcholy nebyly žádné další zadané body.

Úloha 2. Na louce stojí n politiků, kde n je liché číslo větší než dva. Neexistují dvě dvojice politiků takové, že by vzdálenosti mezi politiky v těchto dvojicích byly stejné. Každý politik má jedno vajíčko. Všichni najednou ho hodí, každý do tváře tomu politikovi, který k němu stojí nejblíž. Dokaž, že existuje politik, který potom nemá na tváři vajíčko. (PraSe 40–4p–2)

Úloha 3. Ať $P = P_1P_2 \dots P_n$ je mnohoúhelník takový, že pro každé $i \neq j$ existuje k takové, že $|\sphericalangle P_iP_kP_j| = 60^\circ$. Dokaž, že nějaké tři vrcholy P tvoří rovnostranný trojúhelník.

Úloha 4. Zdeněk s Petrem hrají následující hru. Zdeněk vybere kladné celé číslo n. Petr nakreslí na papír n modrých bodů. Potom Zdeněk některé z těchto bodů přebarví na červeno. Obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami papíru, nazveme *rozumný*. Petr vyhraje, pokud zvládne nakreslit rozumný obdélník, který obsahuje[1] všechny červené body, ale žádný modrý bod, jinak vyhraje Zdeněk. Pro jaké nejmenší n Zdeněk vždy vyhraje? (Rioplatense 1997)

[1] Bod je obsažen v obdélníku, pokud leží uvnitř něj nebo na jeho hranici.

Úloha 5. Uvnitř konvexního mnohoúhelníku M je dán bod O. Dokaž, že kolmá projekce bodu O na některou stranu M leží uvnitř této strany.

Úloha 6. Je dáno n bodů v rovině v obecné poloze. Dokaž, že existuje neprotínající se mnohoúhelník s vrcholy v těchto bodech.

Úloha 7. Najdi všechny konečné množiny S bodů v rovině v obecné poloze, pro které platí, že pro každé tři body z S existuje čtvrtý bod v S, který s nimi tvoří rovnoběžník. (Čína TST 2008)

Úloha 8. V rovině je konečný počet červených a modrých přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Pro každý průsečík dvou přímek stejné barvy platí, že jím prochází i přímka barvy opačné. Dokaž, že všechny tyto přímky prochází jedním bodem. (Rusko 2002)

Úloha 9. (Sylvester–Gallai) Nechť S je konečná množina bodů v rovině taková, že na žádné přímce neleží právě dva body. Dokaž, že všechny body v S leží na jedné přímce.

Parita

To, že sudé číslo není liché a naopak, asi není žádné velké překvapení. V mnohých kombinatorických úlohách to ale je zásadní krok v řešení. Protože je to důležitá vlastnost čísel, vysloužila si vlastní pojmenování – parita. Obzvlášť když chceme ukázat, že něco neexistuje, může se vyplatit se nad ní chvilku zamyslet. Následující příklad ukazuje, jak spočítat dvakrát paritu nějakého počtu může pomoct.

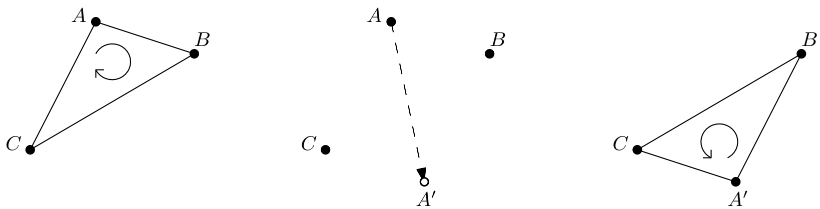
Příklad. Je do roviny možné nakreslit devět úseček tak, aby každá úsečka protínala právě tři jiné úsečky? (PraSe 41–1j–3)

Řešení. Možné to není. Spočítejme celkový počet uspořádaných dvojic úseček, co se protínají. První úsečku můžeme vybrat devíti způsoby a druhou třemi, celkový počet možností je $9 \cdot 3 = 27$. Uvažme nějaké dvě úsečky a a b. Jestliže a protíná b, potom taky b protíná a. To znamená, že každé „protnutí“ se započítá dvakrát. Dostáváme spor, protože 27 je liché číslo.

V dalším příkladě jedno číslo, u kterého bychom mohli zkoumat paritu, dostaneme rovnou v zadání. Spočítat jeho paritu podruhé je ale trikovější.

Příklad. Na kluzišti trénuje hokejista. Má tři puky, které leží ve vrcholech nedegenerovaného trojúhelníku. Pokaždé si jeden vybere a odpálí ho tak, aby proletěl mezi zbylými dvěma (a aby opět vznikl nedegenerovaný trojúhelník). Může je 2023. odpalem vrátit do původní polohy tak, aby každý puk byl tam, kde začínal?

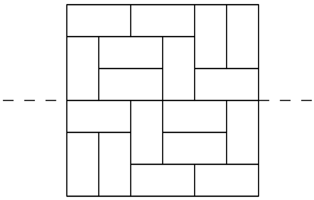
Řešení. Označme si hokejistovy puky A, B a C. Uvažme orientaci trojúhelníku ABC. Orientace trojúhelníku je dána tím, v jakém pořadí jsou na něm body ABC – buď můžou jít po, nebo proti směru hodinových ručiček. Co se stane, když hokejista odpálí puk? Orientace trojúhelníku se změní! Orientace trojúhelníku se změní s každým odpalem, takže po lichém počtu odpalů nemůžeme skončit v původní poloze.

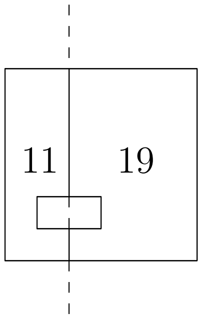


V kombinatorické geometrii občas potkáme i nějakou tabulkovou úlohu.

Příklad. Čtvercový dort s rozměry 6×6 je pokrytý kousky čokolády 2×1. Dokaž, že ho vždy můžeme rozkrojit rovným řezem na dvě části, aniž bychom krájeli kousek čokolády.

Řešení. Máme k dispozici 10 různých svislých a vodorovných řezů a každý kousek čokolády může zablokovat nejvýše jeden z nich. Bohužel kousků čokolády je 18, což je víc než 10. Naštěstí nás zachrání parita. Mohlo by se stát, že by nějaký řez protínal jenom jeden kousek čokolády? Nemohlo! Na obou stranách řezu by potom zbýval lichý počet políček, takže by nebylo možné je pokrýt kousky čokolády velikosti 2. Na zablokování řezu jsou tedy potřeba aspoň dva kousky čokolády, takže vždy zůstane aspoň jeden volný, protože $\frac{18}{2} = 9 < 10$.



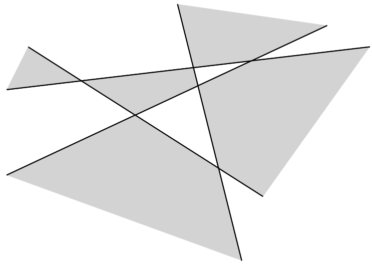


V dalším příkladu nepoužijeme paritu ve standardním slova smyslu, ale pořád se jedná o úvahu podobného stylu.

Příklad. V rovině je dáno 2017 přímek takových, že žádné tři z nich neprochází jedním bodem. Hlemýžď Turbo se nachází v nějakém bodě právě jedné z daných přímek a začíná se pohybovat po těchto přímkách podle následujícího pravidla: Pohybuje se po dané přímce do doby, dokud nedorazí do průsečíku dvou daných přímek. Od tohoto průsečíku pokračuje v pohybu po jiné přímce, přičemž se vydá buď doprava, nebo doleva, a to střídavě v po sobě následujících průsečících přímek. Směr může měnit jedině v průsečících daných přímek. Může existovat nějaká úsečka na některé z daných přímek, po které Turbo během své cesty projde v obou směrech? (EGMO 2017–3)

Řešení. Přímky nám rovinu dělí na několik oblastí. Tyto oblasti obarvíme modře a červeně tak, aby sousedící oblasti měly různé barvy. O dvou oblastech řekneme že sousedí, pokud mají společnou část hranice. Na první pohled nemusí být jasné, že oblasti lze takhle obarvit. Můžeme to ukázat indukcí. Začneme s prázdnou jednobarevnou rovinou a budeme postupně přidávat přímky. Vždy když přidáme přímku, rozdělí nám rovinu na dvě části a my změníme barvu všech oblastí v jedné z těchto částí. Je zřejmé, že takto dostaneme vyhovující obarvení.

Předpokládejme, že Turbo má na začátku po levém boku červenou oblast. Jakmile dojde ke křižovatce, zatočí doleva nebo doprava. Nezávisle na tom ovšem bude mít po levém boku stále červenou oblast. Vidíme, že Turbo bude mít po celou dobu nalevo od sebe červenou, takže po každé úsečce může projít jenom v jednom směru.



Úloha 10. Je dáno devět bodů v prostoru, všechny z nich mají celočíselné souřadnice. Dokaž, že z nich můžeme vybrat dva body A a B takové, že střed úsečky AB má také celočíselné souřadnice.

Úloha 11. V rovině leží n bodů, označme jejich množinu S. Když vybereme libovolné dva body z S, lze k nim najít třetí bod z S, který má od obou z nich stejnou vzdálenost. Zároveň ale platí, že nelze vybrat čtyři body z S tak, aby jeden z nich byl středem kružnice opsané zbylým třem. Dokaž, že n je liché. (IMO 2015–1b)

Úloha 12. Uvnitř $2n$-úhelníku sedí liška. Ze všech vrcholů po ní najednou vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokaž, že některá strana byla zasažena dvakrát.

Úloha 13. Šachovnice 8×8 je vydlážděna dominy. Dokaž, že počet vodorovných domin, jejichž levé políčko je bílé, je stejný jako počet vodorovných domin, jejichž pravé políčko je bílé.

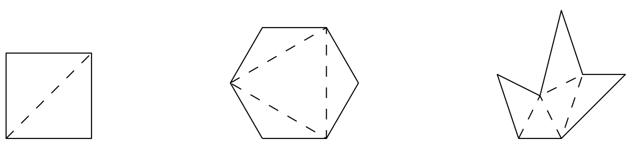
Úloha 14. Malíř Dláža namaloval pravidelný $(2n+1)$-úhelník. Malířky Klátra a Klárka hrají hru, při níž se střídají v tazích a Klátra začíná. Ve svém tahu namalují dosud nenamalovanou úhlopříčku $(2n+1)$-úhelníku, která protne sudý počet již namalovaných úhlopříček ve vnitřních bodech. Malířka, která nemůže táhnout, prohrává. Zjisti v závislosti na n, kdo má vyhrávající strategii. (PraSe 41–4j–1a)

Úloha 15. Ať $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ je nějaká permutace vrcholů pravidelného $2n$-úhelníku. Označme $P_{2n+1} = P_1$. Dokaž, že existuje i a j takové, že P_iP_{i+1} je rovnoběžné s P_jP_{j+1}.

Triangulace

Další způsob, jak si v úloze uklidit, se zaměřuje na mnohoúhelníky. Když máme jeden velký a složitý mnohoúhelník, můžeme si ho rozdělit na několik menších. A když už ho rozdělujeme na menší, proč ho rovnou nerozdělit na ty úplně nejjednodušší, na trojúhelníky?

Definice. *Triangulací* mnohoúhelníku rozumíme jeho rozdělení na trojúhelníky pomocí neprotínajících se vnitřních diagonál.



Než se pustíme do větších tvrzení, pojďme si rozmyslet pár cvičení.

Cvičení 2. Kolik diagonál a kolik trojúhelníků obsahuje triangulace n-úhelníku?

Cvičení 3. Kolik různých triangulací má pravidelný šestiúhelník?

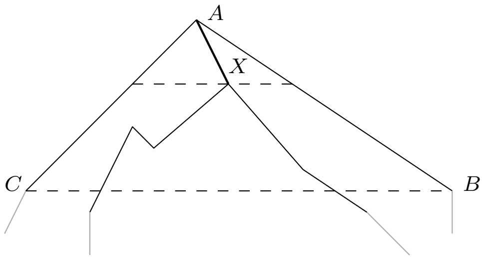
Je docela jasné, že každý konvexní mnohoúhelník má triangulaci, platí to ale i pro nekonvexní mnohoúhelníky? To už tak jasné není, ale odpověď je ano.

Tvrzení. *Každý mnohoúhelník má triangulaci.*

Nejprve si dokažme jedno pomocné lemma.

Lemma. *Každý n-úhelník, kde $n \geq 4$, obsahuje vnitřní diagonálu.*

Důkaz. Začněme tím, že najdeme vrchol, u kterého je konvexní (menší než $180°$) úhel a označíme ho A. Sousedy našeho vrcholu označme B a C. Jestliže diagonála BC neprotíná žádnou stranu, jsme hotovi. Uvnitř trojúhelníku ABC tedy musí být nějaké vrcholy mnohoúhelníku. Označme X ten bod, který je nejvzdálenější od přímky BC. Není těžké si rozmyslet, že diagonála AX teď nemůže protínat žádnou stranu našeho mnohoúhelníku, a důkaz je tedy hotov. Kdyby totiž AX protínala nějakou stranu mnohoúhelníku, znamenalo by to, že existuje vrchol mnohoúhelníku uvnitř ABC, který je od strany BC dále než X, což by byl spor.



□

Cvičení 4. Rozmysli si, proč by nefungovalo zvolit za X vrchol uvnitř ABC, který je nejbližší k A.

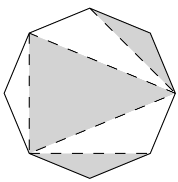
Teď už je důkaz existence triangulace jednoduchý.

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu vrcholů. Pro trojúhelníky zjevně platí. Teď nám stačí dokázat indukční krok. Podle předchozího lemmatu v mnohoúhelníku existuje vnitřní diagonála, nechť je tato diagonála součástí triangulace. Teď už jen stačí triangulovat dva menší mnohoúhelníky, na které je ten původní zvolenou diagonálou rozdělen. Tyto mnohoúhelníky ovšem mají triangulaci z indukčního předpokladu, důkaz je tedy hotov. □

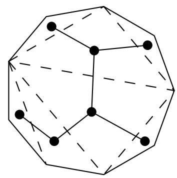
Cvičení 5. Pomocí triangulací si rozmysli, jaký je součet úhlů v n-úhelníku.

Cvičení 6. Dokaž, že každá triangulace n-úhelníku pro $n \geq 4$ obsahuje alespoň dva vrcholy, ze kterých nevede žádná diagonála.

Cvičení 7. Dokaž, že trojúhelníky v triangulaci lze obarvit dvěma barvami tak, aby trojúhelníky sdílející diagonálu měly různou barvu.



Obě předchozí cvičení jde poměrně snadno dokázat indukcí. Existuje ale způsob, jak se této práci vyhnout. Podívejme se nyní na trojúhelníky triangulace jako na „to důležité“ a nakresleme si za každý z nich puntík. Dva puntíky spojíme čárou, pokud příslušné trojúhelníky sousedí stranou. Cože jsme to právě udělali? Nakreslili jsme graf![2] A ne jen ledajaký graf, je to dokonce strom. Jak to víme? Když odebereme hranu, což odpovídá rozříznutí mnohoúhelníku podle jeho diagonály, rozpadne se nám graf (mnohoúhelník) na dvě nesouvislé části. Zároveň celý graf je souvislý, tedy už to musí být strom. A že stromy mají alespoň dva listy nebo že se jejich vrcholy dají obarvit dvěma barvami, aby sousední vrcholy neměly stejnou barvu, už je známá věc.



Tak už máme jednu triangulaci! Když se ale podíváš na nějaký slušný, ne moc nekonvexní mnohoúhelník, asi Tě napadne, že jich může být mnohem víc. Kolik přesně?

Definice. C_n značí n-té *Catalanovo číslo* a udává počet triangulací pravidelného $(n+2)$-úhelníku.

Tohle je jen jeden z mnoha způsobů, jak se na Catalanova čísla dívat. Odpovídá to třeba i počtu validních uzávorkování, počtu cest v mřížce, když chodíme jen doprava a nahoru a nechceme se dostat nad diagonálu, nebo také počtu zakořeněných binárních stromů. Dokonce se dá n-té Catalanovo číslo explicitně vyjádřit, ač na první pohled není jasné, proč to vyjde zrovna tolik.

Tvrzení. *Platí* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Dokázat to, co jsme si zrovna řekli, by chvíli zabralo a není to úplně kombinatorická geometrie, takže se tím zabývat nebudeme.[3]

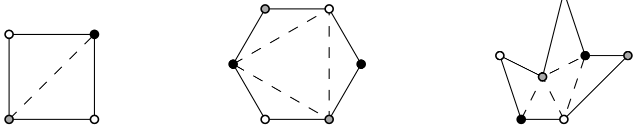
Můžeš si rozmyslet, že pro konvexní mnohoúhelník je počet triangulací závislý jen na počtu vrcholů. Jakmile ale povolíme, aby byl mnohoúhelník nekonvexní, můžou se s počtem triangulací dít všelijaké věci.

Úloha 16. Pro každé n najdi mnohoúhelník, který má právě n triangulací. (Rumunsko 2019)

Úloha 17. Pro každé n najdi n-úhelník, který má pouze jednu triangulaci.

Triangulace se stane ještě mocnější, začneme-li vrcholy mnohoúhelníku barvit.

Příklad. Dokaž, že je možné obarvit vrcholy triangulovaného mnohoúhelníku třemi barvami tak, aby měl každý trojúhelník vrcholy různých barev.



[2] O grafech a dalších pojmech z jejich světa si můžeš něco přečíst tady: *https://prase.cz/archive/34/serial.pdf*.

[3] Pokud Tě Catalanova čísla zaujala a chceš se o nich dozvědět víc, podívej se třeba sem: *https://prase.cz/library/CatalanovaCislaMR/CatalanovaCislaMR.pdf*.

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí, pro trojúhelník zjevně platí. Předpokládejme, že platí pro $(n-1)$-úhelník, a dokažme jej pro n-úhelník. Podle Cvičení 6 v naší triangulaci existuje vrchol, ze kterého nevede žádná diagonála. To znamená, že vede diagonála mezi jeho sousedy, odebráním tohoto vrcholu tedy dostaneme triangulaci $(n-1)$-úhelníku. Tu už podle indukčního předpokladu obarvit umíme, a když přidáme zpět odebraný vrchol, určitě pro něj ještě zbývá jedna barva. □

Úloha 18. V n-úhelníku je umístěno $n-2$ bodů tak, že uvnitř každého trojúhelníku, jehož každá strana je vnitřní diagonála nebo strana mnohoúhelníku, leží aspoň jeden. Dokaž, že v každém takovém trojúhelníku potom leží právě jeden.

Úloha 19. Lucka upekla dort ve tvaru pravidelného n-úhelníku, kde $n > 4$. Nejprve jej po obvodu potřela polevou a následně jej několika rovnými řezy rozřezala na trojúhelníkové dílky, jejichž všechny vrcholy jsou vrcholy původního n-úhelníku. Dokaž, že dílků, které mají dvě své strany potřené polevou, je právě o 2 více než dílků, které nemají polevou potřenou žádnou stranu. (PraSe 40–3j–2)

Úloha 20. Je dán konvexní mnohoúhelník. Dokaž, že má nejvýše jednu triangulaci, jejíž každý trojúhelníků je ostroúhlý. (Rusko 2003)

Úloha 21. Pro která n existuje triangulace konvexního n-úhelníku, v níž z každého vrcholu vychází sudý počet diagonál?

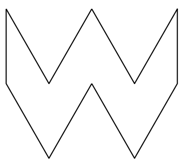
Úloha 22. (Art gallery problem) Půdorys galerie má tvar n-úhelníku (ne nutně konvexního). Dokaž, že je možné do galerie rozmístit nejvýše $\frac{n}{3}$ hlídačů tak, aby viděli každý její bod. Hlídači jsou reprezentovaní bodem a vidí do všech směrů.

Úloha 23. Pro $n \geq 3$ je dán konvexní n-úhelník K, jehož žádné čtyři vrcholy neleží na jedné kružnici. Trojúhelník daný trojicí vrcholů n-úhelníku K nazveme *pokrývací*, pokud jemu opsaný kruh pokrývá K. Dokaž, že pokrývacích trojúhelníků je přesně $n-2$. (PraSe 36–3p–7)

Konstrukce

Nedílnou součástí kombinatorické geometrie jsou konstrukce. Když chceme dokázat, že něco existuje, je většinou nejjednodušší prostě ukázat, jak to vypadá. Je těžké dát nějakou obecnou radu, jak najít tu správnou konstrukci. Často se ale hodí využít symetrií a různých speciálních případů. Co třeba zkusit pravidelný mnohoúhelník? Co kdyby všechny body ležely na kružnici nebo na přímce? V této sekci nebudou řešené příklady, protože nám připadá lepší, když se nad těmito úlohami zamyslíš sám (sama) a řešení je většinou vidět z obrázku. Nápovědu a řešení ke všem úlohám ovšem najdeš na konci tohoto dílu.

Úloha 24. Rozděl následující tvar na sedm shodných částí.



Úloha 25. Je možné do roviny nakreslit šest bodů v obecné poloze tak, aby libovolná trojice tvořila rovnoramenný trojúhelník? (PraSe 42–1p–2)

Úloha 26. (4 points, 2 distances) Majda na papír nakreslila čtyři body a změřila vzdálenosti mezi všemi dvojicemi. Ke svému překvapení zjistila, že naměřila jenom dvě různé hodnoty. Jaké jsou všechny možnosti, jak Majda mohla body nakreslit?

Úloha 27. Existuje mnohoúhelník takový, že uvnitř něj můžeme najít bod, ze kterého není vidět žádná strana celá?

Úloha 28. Najdi v rovině sedm bodů takových, že když libovolný z nich smažeme, je možné mezi zbylými najít čtyři tvořící vrcholy čtverce.

Úloha 29. Je možné rozdělit čtverec na několik ostroúhlých trojúhelníků?

Úloha 30. Najdi šestiúhelník, který lze rozdělit rovným řezem na čtyři shodné trojúhelníky.

Úloha 31. Obdélník v rovině, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, nazveme *osovým.* Najdi osové obdélníky $R_1, \ldots, R_6$ takové, že R_i nemá žádný společný bod právě s obdélníky R_{i-1} a R_{i+1}.[4]

Úloha 32. Dokaž, že pro libovolné $n \geq 3$ lze do roviny umístit n bodů tak, že když vybereme libovolné dva body z nich, lze k nim najít třetí, který má od obou stejnou vzdálenost.

(IMO 2015–1a)

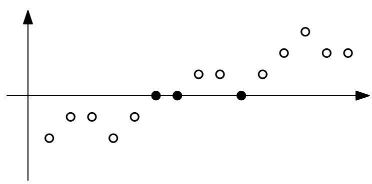
Úloha 33. (Moser Spindle) Umísti do roviny sedm bodů tak, aby libovolný trojúhelník s vrcholy v těchto bodech měl aspoň jednu stranu délky 1.

Diskrétní spojitost a zametání

V této části se podíváme na dvě techniky naráz, protože ač je každá něco trochu jiného, v kombinatorické geometrii se většinou používají dohromady.

Diskrétní spojitost sice může znít děsivě, ale nejedná se o nic složitého. Vlastně to jen říká, že když začneme ve sklepě a dojdeme do patra, přičemž vždy postoupíme jen o jeden schod nahoru nebo dolů, museli jsme projít přízemím. Formálně se to dá napsat třeba následujícím způsobem:

Tvrzení. (Discrete Intermediate Value Theorem) *Nechť $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je funkce, která splňuje $|f(t) - f(t+1)| \leq 1$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Pokud $f(a) \leq f(b)$, kde $a \leq b$, potom pro libovolné k, kde $f(a) \leq k \leq f(b)$, existuje c takové, že $f(c) = k$, a navíc $a \leq c \leq b$.*



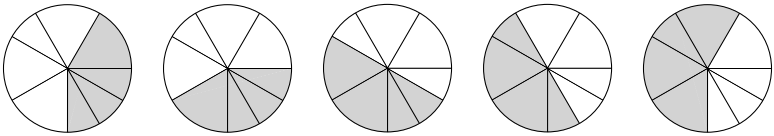
Méně formálně se dá říct, že když se nějaká celočíselná proměnná může měnit nejvýše o 1, potom nabývá všech mezihodnot. To na první pohled vůbec nemusí souviset s geometrií, a vskutku se diskrétní spojitost dá využít leckde jinde. Většinou se jedná o úlohy, kde je nějaký algoritmus nebo proces. My se podíváme na jeden jeho krok, začátek a konec a pomocí diskrétní spojitosti řekneme, že musel nastat nějaký stav. Například že nějaká hodnota musela být někdy nulová.

V kombinatorické geometrii většinou ale žádný proces nemáme, takže si ho musíme sami vyrobit. A to se dělá právě pomocí zametání. Zametání obvykle popisuje techniku, ve které pohybujeme přímkou v nějakém směru, třeba shora dolů. Když přímka potká nějaký bod (nebo nějaký jiný objekt), odpovídá to jednomu našemu kroku v diskrétní spojitosti. Můžeš si to představovat tak, že přímkou „zametáme“ rovinu a sbíráme body. Jaký krok vlastně uděláme, když potkáme bod, záleží na úloze. Nemusíme zametat jenom přímkou, klidně můžeme použít třeba nafukující se kružnici.

[4]Indexujeme cyklicky, tedy $R_{-1} = R_6$ a $R_7 = R_1$.

Příklad. Martin k narozeninám dostal kruhový dort a hned se rozhodl polovinu z něj darovat Zuzce. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků. Právě $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokaž, že Martin i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (PraSe 33–1j–5)

Řešení. Začneme tím, že vybereme libovolných $2k$ po sobě jdoucích dílků. Podívejme se na rozdíl počtu malých a velkých dílků (včetně znaménka, tato hodnota tedy klidně může být záporná). Jestliže je tento rozdíl 0, vybrané kousky tvoří půlkruh a máme hotovo. Teď si všimněme, že tento rozdíl musí být sudý. Nyní začneme „zametat" okolo středu dortu $2k$-ticí po sobě jdoucích dílků. Co se stane, když vybereme místo prvního až $2k$-tého dílku druhý až $(2k+1)$-ní? Rozdíl počtu malých a velkých dílků se změní o 0 nebo ± 2. Když takto budeme pokračovat, dostaneme se po chvíli do stavu, kdy budou vybrané přesně ty dílky, které nebyly vybrané na začátku. Oproti počátečnímu stavu se tedy změnilo znaménko rozdílu počtu malých a velkých dílků. Z kladného sudého čísla jsme se tedy dostali na záporné sudé číslo (nebo ze záporného na kladné), přičemž se hodnota vždy měnila o 0 nebo 2. To ovšem znamená, že jsme někdy v průběhu museli narazit na nulu! Tím je úloha vyřešena, protože když byl rozdíl nulový, tvořily vybrané dílky půlkruh.



Ačkoli diskrétní spojitost v kombinatorické geometrie bez zametání spíš nepoužiješ, naopak to neplatí. Někdy se hodí zametat prostě třeba jen proto, abychom si zadané objekty nějak uspořádali.

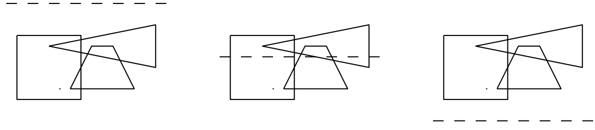
Příklad. V rovině je dáno $3n$ bodů v obecné poloze. Dokaž, že je možné je pospojovat tak, abychom vytvořili n disjunktních trojúhelníků.

Řešení. Rovinu s body si pootočme tak, aby žádné dva neležely na svislé přímce. Potom budeme zametat přímkou zleva doprava a v pořadí, ve kterém potkáváme body, je rozdělujeme do trojic. První tři body tedy budou tvořit první trojúhelník, další tři druhý a tak dále. Žádné dva trojúhelníky se nebudou protínat.

Jak už jsme si řekli, zametání je vlastně takový algoritmus, takže bychom mohli chtít zkoumat, jak, jestli a kdy skončí. K čemu se to může hodit, ukazuje následující příklad.

Příklad. V rovině leží několik mnohoúhelníků tak, že se každé dva protínají. Dokaž, že existuje přímka, která je protíná všechny.

Řešení. Uvážíme vodorovnou přímku. Na začátku umístíme přímku tak, že jsou všechny mnohoúhelníky pod ní. Nyní začněme naší přímkou pohybovat shora dolů. Uvažme množinu mnohoúhelníků, které přímka protíná. Každý mnohoúhelník do množiny jednou přidáme a jednou ho z ní odebereme. Budeme chtít ukázat, že existuje okamžik, kdy tato množina obsahuje všechny mnohoúhelníky. Může se stát, že z ní odebereme mnohoúhelník a zároveň existuje jiný, který jsme tam ještě nepřidali? Stát se to nemůže, protože potom by jeden mnohoúhelník byl nad přímkou a jiný pod ní, takže by se nemohly protínat. To znamená, že do naší množiny nejdříve přidáme všechny mnohoúhelníky a až potom je začneme odebírat.



Úloha 34. V rovině je dán bod A a několik mnohoúhelníků, přičemž každé dva z nich se protínají. Dokaž, že existuje kružnice se středem v A, která je protíná všechny.

Úloha 35. V rovině je dáno $2n$ bodů v obecné poloze. Dokaž, že existuje přímka procházející dvěma z těchto bodů, která dělí body na dvě skupiny o velikosti $n-1$.

Úloha 36. V rovině je několik bodů v obecné poloze. Ukaž, že existuje kružnice procházející alespoň třemi z nich, která ve svém vnitřku neobsahuje žádný další.

Úloha 37. V rovině jsou dány přímky, které se protínají v N bodech. Pepa chce očíslovat tyto body od 1 do N, aby pro každou přímku platilo, že body na ní jsou očíslované v jednom nebo druhém směru v rostoucí pořadí. Může se mu to podařit? (Mexiko 2018)

Úloha 38. V rovině leží několik obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a splňují následující vlastnost: pro libovolné dva obdélníky A a B existuje vodorovná nebo svislá přímka, která protíná A i B. Dokaž, že je možné zvolit jednu vodorovnou a jednu svislou přímku tak, aby každý obdélník byl protnutý aspoň jednou z nich. (*i*KS 2020/2021, C6)

Úloha 39. Ať S je množina $2n+1$ bodů v rovině v obecné poloze, z nichž žádné čtyři neleží na kružnici. Kruh nazveme *dobrým*, pokud na jeho obvodu leží tři body z S, uvnitř něj leží $n-1$ bodů a zbylých $n-1$ bodů leží vně něho. Dokaž, že skrz každou dvojici bodů z S prochází lichý počet dobrých kruhů. (APMO 1999, upraveno)

Pickova formule

Možná si ještě pamatuješ úlohy ze základní školy, kdy byl v mřížce nakreslený nějaký zběsilý útvar a Tvým úkolem bylo spočítat jeho obsah. V takové úloze jde o to zadaný útvar vyskládat z pravoúhlých trojúhelníků a obdélníků, nebo naopak nakreslit obdélník kolem něj a trojúhelníky odebírat. Protože obsahy obdélníků a pravoúhlých trojúhelníků spočítat umíme, šlo to i se zadaným útvarem. To je víceméně myšlenka Pickovy formule.

Definice. Bod v rovině, jehož obě souřadnice jsou celočíselné, nazveme *mřížovým bodem.*

Úmluva. V této sekci budeme uvažovat pouze mnohoúhelníky s vrcholy v mřížových bodech.

Tvrzení. (Pickova formule) *Nechť M je mnohoúhelník, i počet mřížových bodů uvnitř něj a b počet bodů na jeho hranici. Obsah M potom je $i+\frac{b}{2}-1$.*

Proč by tohle tvrzení mělo dávat smysl? Chceme vlastně spočítat počet „čtverečků“ uvnitř M. To bude přibližně stejně, jako je mřížových bodů v něm. Body na hranici jsou v něm vlastně jen tak „z půlky“, takže je započítáme jen z poloviny. To je hodně neformální intuice, důkaz se bude ubírat spíše tím směrem, který jsme naznačili před tvrzením.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že když Pickova formule platí pro nějaké dva mnohoúhelníky, bude platit i pro mnohoúhelník vzniklý jejich slepením. Potom už bude stačit dokázat platnost pro trojúhelníky, z čehož bude díky lepení a existenci triangulace Pickova formule fungovat pro všechny mnohoúhelníky.

Mějme mnohoúhelník M rozdělený diagonálou na dva menší mnohoúhelníky M_1 a M_2. Ukážeme, že jestliže Pickova formule platí pro M_1 a M_2, musí už nutně platit i pro M. Počet bodů na diagonále oddělující M_1 a M_2 označíme s. Dále označme i_1 a i_2 počet bodů uvnitř M_1 a M_2, b_1 a b_2 počet bodů na jejich hranicích. Uvnitř M je tedy $i=i_1+i_2+s-2$ bodů, na hranici $b=b_1+b_2-2s+2$. Označme obsahy M, M_1 a M_2 postupně S, S_1 a S_2. Předpokládáme platnost Pickovy formule pro M_1 a M_2, takže platí

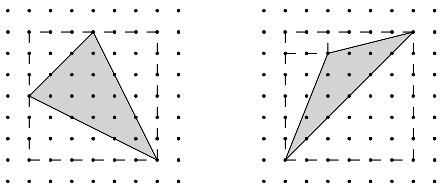
$$S=S_1+S_2=\left(i_1+\frac{b_1}{2}-1\right)+\left(i_2+\frac{b_2}{2}-1\right)=$$
$$=(i_1+i_2+s-2)+\frac{1}{2}(b_1+b_2-2s+2)-1=i+\frac{b}{2}-1,$$

takže Pickova formule funguje i pro M.

Zcela obdobně bychom mohli z platnosti Pickovy formule pro M a M_1 dokázat její platnost i pro M_2. Můžeme tedy mnohoúhelníky nejen slepovat, ale i odřezávat.

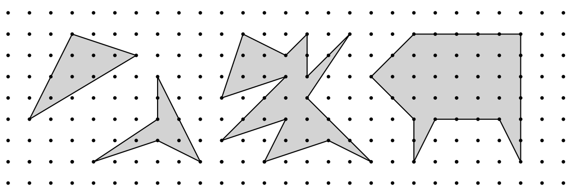
Když máme obdélník se stranami a a b, má na hranici $2a + 2b$ bodů a uvnitř $(a-1)(b-1)$ bodů. Snadno ověříme, že z Pickova vzorce opravdu vyjde jeho obsah, tedy ab. Máme-li pravoúhlý trojúhelník T, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, můžeme ho doplnit shodným trojúhelníkem T' na obdélník. Výsledek Pickovy formule pro T označíme p. Pickova formule vychází stejně pro T a T', tedy pro obdélník bude díky slepování dokázanému výše vycházet $2p$. Pro obdélník však Pickova formule vychází správně, zároveň obsah T je oproti němu poloviční, tedy musí vycházet i pro T.

Teď už můžeme formuli dokázat pro libovolný trojúhelník T. Na to vezmeme nejmenší obdélník, který T obsahuje, a odřežeme z něj pravoúhlé trojúhelníky a obdélníky tak, aby nám zbyl jenom T. Pro obdélníky a pravoúhlé trojúhelníky jsme již Pickovu formuli dokázali, takže dostáváme platnost pro T.



□

Cvičení 8. Jaké obsahy mají následující útvary?

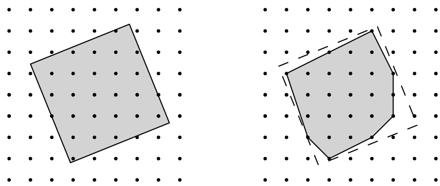


Příklad. Existuje rovnostranný trojúhelník, jehož všechny vrcholy jsou mřížové body?

Řešení. Neexistuje. Předpokládejme, že by takový trojúhelník existoval, označme délku jeho strany a. Obsah tohoto trojúhelníku by potom byl $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Délka a je přitom vzdálenost dvou mřížových bodů, takže a^2 z Pythagorovy věty musí být přirozené číslo. To ale znamená, že S je iracionální, jenže z Pickovy formule musí být dvojnásobek obsahu celočíselný, tudíž S musí být racionální.

Příklad. V rovině leží čtverec $n \times n$ (ne nutně mřížový), dokaž, že nemůže zakrývat víc než $(n+1)^2$ mřížových bodů.

Řešení. Předpokládejme, že takový čtverec existuje a zakrývá $N > (n+1)^2$ mřížových bodů. Zkusíme pomocí Pickovy formule dokázat, že by musel mít obsah větší než n^2. Pickova formule ale bohužel přímo použít nejde, protože náš čtverec není mřížový. Představme si, že je obvod čtverce tvořený gumičkou a mřížové body jsou hřebíky zabodané do roviny. Gumička se stáhne a zasekne se o hřebíky jako na obrázku. Tím dostaneme nějaký útvar, který má obvod i obsah menší než původní čtverec. Nový útvar už je mřížový mnohoúhelník, takže pro něj můžeme použít Pickovu formuli. Kolik nejvíce mřížových bodů může být na jeho obvodu? Každé dva mřížové body mají vzdálenost aspoň 1 a obvod vzniklého útvaru je nejvýše $4n$, takže $b \leq 4n$ a $i = N - b$. Pickova formule říká, že obsah daného útvaru je $S = i + \frac{b}{2} + 1 = N - \frac{b}{2} + 1 > n^2$, což je spor, protože jsme začali se čtvercem $n \times n$ o obsahu n^2.



Úloha 40. Uvažujme mřížový trojúhelník, jehož strany neobsahují kromě samotných vrcholů žádné mřížové body a který ve svém vnitřku obsahuje právě jeden mřížový bod. Nahlédni, že tento vnitřní mřížový bod musí být těžištěm trojúhelníku. (Austrálie 1993)

Úloha 41. (Pick pro děravé mnohoúhelníky) Mějme v rovině mnohoúhelník P s h dírami. Formálně: nechť P vznikne odebráním navzájem disjunktních mřížových mnohoúhelníků $P_1, \ldots, P_h$ od mřížového mnohoúhelníku P_0, přičemž obvody jednotlivých P_i jsou disjunktní s obvodem P_0 i spolu navzájem. Dokaž, že pokud P obsahuje ve svém vnitřku a na svých obvodech po řadě i a b mřížových bodů, pak má obsah $i + \frac{b}{2} + h - 1$.

Úloha 42. Kolika různými způsoby je možné zaplatit částku 2022 za použití mincí o hodnotách 1, 2 a 3? Způsoby zaplacení, které se liší jen pořadím mincí, nepovažujeme za různé.

Úloha 43. Dokaž, že pro $n \geq 3$ existuje n bodů v rovině takových, že vzdálenost libovolných dvou je iracionální a zároveň každé tři tvoří nedegenerovaný trojúhelník s racionálním obsahem. (IMO 1987–5)

Úloha 44. *Půlbodem* nazveme libovolný bod tvaru $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ pro celá čísla a, b. Nahlédni, že libovolný půlbod ležící ostře uvnitř mřížového mnohoúhelníku lze vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body ležící uvnitř nebo na obvodu tohoto mnohoúhelníku.

Závěr

Gratulujeme! Ve většině olympiádních úloh z oblasti kombinatorické geometrie už by Tě nemělo nic překvapit. Ale možná přece jen něco … Ve druhém díle si zavedeme pojem konvexní množiny a konvexního obalu, které se můžou taky ukrutně hodit. Dokážeme si o nich pár hezkých vět, které sice často vypadají intuitivně, ale dokázat je pořádně chvíli zabere.

Přejeme Ti hodně zdaru při řešení soutěžních úloh a těšíme se na Tebe u druhého dílu!

Návody ke cvičením

1. Rozeber několik konfigurací.

2. Vezmi triangulaci a slepuj postupně trojúhelníčky k sobě.

3. Prostě si je nakresli a využij symetrií.

4. Co kdyby byl úhel ABC hodně tupý?

5. Součet úhlů v trojúhelníku je známý, počet trojúhelníků v triangulaci taky.

6. Zkus na to jít podobně jako v důkazu předchozího tvrzení.

7. Použij předchozí cvičení.

8. Spočítej puntíky.

Návody k úlohám

1. Nejmenší obsah.

2. Stačí ukázat, že existuje politik, který byl trefený dvakrát.

3. Nejdelší vzdálenost.

4. Jak by to bylo na úsečce?

5. Nejbližší strana.

6. Co takhle na to jít podobně jako v příkladu, kde se párovaly body?

7. Trojúhelník s největším obsahem.

8. Najdi konfiguraci čtyř přímek, která tam musí být, a minimalizuj obsah nějakého trojúhelníku.

9. Minimální vzdálenost bodu od přímky.

10. Podívej se na paritu souřadnic.

11. Na ose kolika úseček může jeden bod ležet?

12. Rozděl si mnohoúhelník podle jedné ze střel.

13. Šachovnicové obarvení, jaká domina můžeme rozříznout svislým řezem?

14. Na konci bude zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček.

15. Je $2n$ směrů úhlopříček. Jaká je parita počtu vrcholů, o který se posuneme, když použijeme určitý směr?

16. Zkus třeba $(n+2)$-úhelník.

17. Jak vypadá diagonála, která v triangulaci určitě musí být?

18. Libovolný trojúhelník lze doplnit na triangulaci.

19. Spočítej počet stran trojúhelníků s polevou a počet stran trojúhelníků bez polevy.

20. Využij Cvičení 6 a indukci.

21. Odebírej diagonály. Využij Cvičení 2.

22. Vzpomeň si na příklad s barvením vrcholů triangulace.

23. Najdi triangulaci, která má jen pokrývací trojúhelníky. Pokud o nich nic nevíš, přečti si něco o tětivových čtyřúhelnících a jejich úhlech.

24. Fakt to není těžké.

25. Hmm, pravidelný šestiúhelník nefunguje … Nenapadá Tě jiná symetrická konstrukce?

26. Možností je šest.

27. Zkus ten mnohoúhelník udělat hodně zubatý.

28. Zařiď, aby tam byly tři čtverce.

29. Těch trojúhelníků tam musí být docela hodně, zkus to udělat symetricky.

30. Blesk.

31. Vyber dvě trojice obdélníků, které budou mít neprázdný průnik.

32. Co takhle zkusit dát ty body na kružnici?

33. Začni s dvěma kosočtverci sdílejícími vrchol.

34. Zkus to vyřešit podobně jako ukázkový příklad.

35. Vyber si libovolný bod a rotuj přímkou.

36. Nafukuj kružnici.

37. Urči jeden směr.

38. Zametej dvěma přímkami naráz.

39. Seřaď si zbylé body podle úhlů a pak je prohazuj.

40. Rozděl si trojúhelník na tři menší. Co víš o jejich obsazích?

41. Jednoduše odečti pickovské obsahy děr.

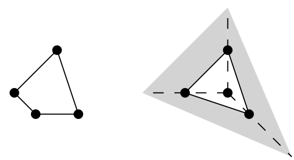
42. Jedničky lze vždy jednoznačně doplnit. Interpretuj validní způsoby zaplacení jako mřížové body překryté jistým trojúhelníkem.

43. Pickovou formulí zařiď racionální obsahy.

44. Středově zobraz mnohoúhelník podle půlbodu a počítej obsahy. Pozor, mohou vzniknout díry!

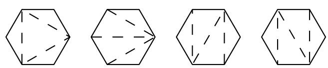
Řesení cvičení

1. Podívejme se na 4 body nejvíc vlevo, pokud tvoří konvexní čtyřúhelník jsme hotovi. Druhá možnost je trojúhelník s bodem uvnitř. Podle tohoto bodu můžeme rozdělit rovinu na tři části. Ať už je zbývající bod kdekoli, vytvoří konvexní čtyřúhelník.

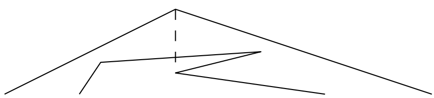


2. Vyjde to $n-3$ a $n-2$.

3. Má jich 14, jsou to rotace následujících možnosti.



4.



5. Stačí sečíst velikosti vnitřních úhlu všech trojúhelníků v nějaké triangulaci, to je $(n-2)\cdot 180^\circ$.

6. Můžeme to dokázat indukcí, prostě vybereme nějakou vnitřní diagonálu a v obou částech z indukce vybereme jeden vrchol, ze kterého nevede žádná diagonála.

7. Využijeme předchozího cvičení a zase použijeme indukci. Vezmeme trojúhelník triangulace takový, že z nějakého jeho vrcholu nevede žádná diagonála a odřízneme jej. Zbytek teď umíme obarvit z indukce a nakonec stačí dobarvit odříznutý trojúhelník.

8. Zleva doprava: 7, $\frac{9}{2}$, $\frac{35}{2}$, 26.

Řesení úloh

1. Uvažme různobarevný trojúhelník ABC s nejmenším obsahem. Kdyby uvnitř byl nějaký bod X, bude mít stejnou barvu jako některý z vrcholů ABC, bez újmy na obecnosti A. Potom XBC je také trojbarevný trojúhelník, ale s menším obsahem než ABC, spor.

2. Pokud existuje politik, kterého trefila dvě vajíčka, na nějakého jiného už vajíčko nezbyde. Zaměřme se na nejbližší dva politiky, ti po sobě určitě navzájem hodí vajíčkem. Kdyby někdo hodil vajíčko po některém z nich, jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že se to nestalo, potom můžeme dvojici nejbližších politiků ignorovat a řešit úlohu dál, jako by tam ta dvojice nebyla. Opakováním stejné úvahy nám nakonec zbyde jen jeden politik, kterého nikdo netrefil.

3. Ať $|AB|$ je nejdelší vzdálenost mezi vrcholy mnohoúhelníku a C je jeho vrchol takový, že $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. Kdyby ABC nebyl rovnostranný trojúhelník, musela by jeho strana AC nebo BC být delší než AB, spor.

4. Odpověď je 5. Pro menší n nalezneme snadno strategii pro Petra. Pro $n \geq 5$ obarví Zdeněk nejvýše čtyři body: nejlevější, nejpravější, nejhornější, nejspodnější.

5. Nechť AB je strana M nejblíže O. Pokud by projekce O na AB ležela na polopřímce opačné BA, bude druhá strana M, která obsahuje B, z konvexity M blíže k O než AB, což je spor.

6. Zvolme nějaké pořadí bodů a označme je A_1, A_2, …, A_n. Berme $A_1 = A_{n+1}$. Nechť se pro nějaké i a j, $i \notin \{j, j+1, j-1\}$, protínají úsečky A_iA_{i+1} a A_jA_{j+1}. Potom prohodíme A_j a A_{i+1}, čímž se tyto úsečky přestanou protínat. Protože se tím součet $|A_iA_{i+1}|$ pro $1 \leq i \leq n$ zmenší, musí dojít k tomu, že se žádná taková dvojice úseček protínat nebude. Pak je $A_1A_2 \dots A_n$ hledaný n-úhelník.

7. Když $|S| = 4$, je situace triviální. Jinak vezmeme trojúhelník ABC s největším obsahem. Ze zadání existuje bod D takový, že $ABCD$ je v nějakém pořadí rovnoběžník. Obsahy ABC, BCD, CDA, DAB jsou všechny stejné. Pokud by některý bod S ležel vně $ABCD$, najdeme trojúhelník s větším obsahem. Pokud by některý bod S ležel uvnitř $ABCD$, bude podle podmínky ze zadání existovat i nějaký bod v S vně $ABCD$. Žádný další bod v S proto nemůže být.

8. Uvažme přímky a_1, a_2, b_1 a b_2, kde a_1 a a_2 mají jednu barvu a b_1 a b_2 mají druhou barvu. Navíc nechť a_1, a_2 a b_1 prochází jedním bodem, b_2 jím neprochází a zbylé tři přímky protíná v pořadí a_1, b_1, a_2. Nejdřív si rozmyslíme, že tam taková konfigurace vůbec je, potom uvážíme takovou, kde a_1, a_2 a b_2 vytínají trojúhelník s nejmenším obsahem. Díky průsečíku b_1 a b_2 dostaneme další takovou konfiguraci s menším obsahem, spor.

9. Pro spor nechť A, B, C jsou takové body, které neleží na jedné přímce a vzdálenost A od BC je nejmenší. Na BC musí ležet další bod D. Dva z bodů B, C, D musí ležet na stejné straně od kolmice z A na BC, bez újmy na obecnosti B a D. Pak je vzdálenost B od AD menší než vzdálenost A od BC, spor.

10. Pro každý bod uvažme jeho paritu jeho x-ové, y-ové a z-ové souřadnice. Máme 9 bodů, ale jenom 8 možností, jak můžou parity vyjít. Pro nějaké dva body tedy musí všechny parity vyjít stejně. Vzdálenost těchto bodů je potom ve všech souřadnicích sudá a střed jejich spojnice musí být celočíselný.

11. Každé dvojici bodů $A, B \in S$ potřebujeme přiřadit třetí bod C, který bude ležet na ose úsečky AB. Vyberme si tedy jeden bod $P \in S$ a zamysleme se, na osách kolika různých úseček může ležet. Co kdyby ležel na ose XY a zároveň na ose YZ pro nějaké $X, Y, Z \in S$? Potom by byl středem kružnice opsané trojúhelníku XYZ, což je zakázané, takže se to stát nemůže. To ovšem znamená, že bod P může ležet na osách pouze $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ různých úseček (jinak by nějaké dvě z nich sdílely koncový bod, což nesmí). Když to sečteme přes všechny body z S dostane $n \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ různých úseček. To je ale pro sudé n moc málo, protože n bodů tvoří celkem $n \cdot \frac{n-1}{2}$ dvojic.

12. Rozdělíme $2n$-úhelník podle jedné ze střel, nechť protíná stranu a. Počet vrcholů střelců a stran různých od a je v jedné polorovině od střely stejný. Protože $2n-1$ je liché číslo, tento počet musí být na jedné straně ostře větší než na druhé. Zároveň střelci z jedné poloroviny se musí trefit do strany v polorovině opačné, tedy z Dirichletova principu jsme hotovi.

13. Uvažme klasické obarvení šachovnice, každé domino potom zakryje jedno černé a jedno bílé políčko. Uvažme nějaký svislý řez a podívejme se, jaká domina rozpůlí (podobně jako v ukázkovém příkladu). Podle ukázkového příkladu jsme museli rozpůlit sudý počet domin. Může se stát, že počet rozpůlených domin s bílým políčkem nalevo je jiný než počet rozpůlených domin s bílým políčkem vpravo? Nemůže, protože potom by bychom na levé části šachovnice (a na pravé taky) měli různý počet zbývajících bílých a černých políček, tudíž by nemohly být pokryté dominy.

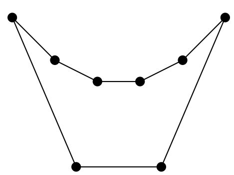
14. Ukážeme, že bude na konci hry zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Pro spor tedy předpokládejme, že je nenamalovaných úhlopříček lichý počet a už není možné táhnout.

V této situaci každou nenamalovanou úhlopříčku protíná lichý počet těch již namalovaných. Nechť XY je libovolná nenamalovaná úhlopříčka. XY dělí mnohoúhelník na dvě části, označíme-li počty vrcholů v jednotlivých částech jako a a b, platí $a+b=2n-1$. Součet $a+b$ je lichý, takže součin ab je sudý. Úhlopříčku XY tedy protíná sudý počet úhlopříček, z nichž je lichý počet namalovaných. Počet nenamalovaných úhlopříček protínajících XY proto musí být lichý. Každou nenamalovanou úsečku (kterých je lichý počet) tedy protíná lichý počet nenamalovaných úseček, to ale podle jednoho z příkladů v sekci o paritě není možné!

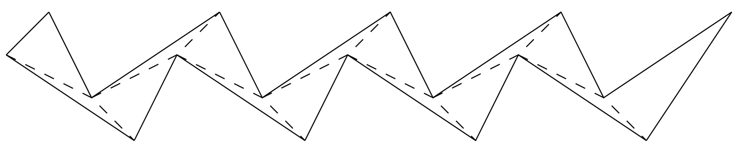
Dokázali jsme, že na konci hry bude zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Celkový počet úhlopříček v $(2n+1)$-úhelníku je $(2n+1)(n-1)$, takže je sudý právě tehdy, když je n liché. Pro sudé n tedy vyhraje Klátra a pro liché n Klárka.

15. Protože je $2n$ možných směrů úhlopříček a $2n$ možných úseček, stačí nám sporem ukázat, že nemůžeme využít všechny. Víme, že n z těchto směrů nás posune o lichý počet vrcholů, n o sudý počet vrcholů. Protože nakonec skončíme tam, kde jsme začali, dohromady se posuneme o nějaký násobek $2n$. Pokud 2^k je nejvyšší mocnina dvojky, která dělí n, celkově se posuneme o násobek 2^{k+1}. Za „sudé" směry se také posuneme o násobek 2^{k+1}, avšak za „liché" o lichý násobek 2^k, tedy v součtu jsme se nemohli posunout o násobek 2^{k+1}, spor.

16. Začneme se dvěma body a naproti nim uděláme nekonvexní oblouk tvořený dalšími n body. Pro $n=6$ by řešení mohlo vypadat třeba takto.



17.



18. Předpokládejme, že v jednom z trojúhelníků leží aspoň dva body. Tento trojúhelník můžeme doplnit na triangulaci, tím vytvoříme $n-3$ dalších trojúhelníků. Zbývá nám ovšem jenom $n-4$ bodů, spor.

19. Počet trojúhelníků, které mají postupně jednu, dvě a tři strany bez polevy označíme J, D a T. Potom počet stran, které trojúhelníky mají s polevou, je $n = 2J + D$. Počet stran bez polevy je $2(n-3) = J+2D+3T$. Odečtením dvojnásobku první rovnice od druhé a vydělením -3 dostaneme $J - T = 2$, přesně jak chceme.

20. Triangulaci splňující zadání označme jako *ostroúhlou.* Mějme nějakou ostroúhlou triangulaci. U vrcholů, z nichž nevede žádná diagonála, musí být ostrý úhel. Dokážeme, že takové vrcholy jsou nejvýše tři. Součet úhlů v n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180^\circ$, takže pokud by byly čtyři, na zbylých $n-4$ úhlů by zbývalo více než $(n-4) \cdot 180$ stupňů. Mnohoúhelník má ale být konvexní, což je spor. Nyní použijeme indukci. Nechť tvrzení platí pro všechny n-úhelníky a dokážeme ho pro $(n+1)$-úhelníky. Vezměme libovolný $(n+1)$-úhelník a pro spor nechť má dvě různé ostroúhlé triangulace. Každá z nich má alespoň dva vrcholy, z nichž nevede diagonála. Protože možné takové vrcholy jsou nejvýše tři, musí mít tyto dvě triangulace jeden z nich společný. Ten můžeme odstranit a dostaneme n-úhelník, který musí mít jednoznačnou triangulaci, spor.

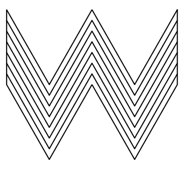
21. Dokážeme, že $3 \mid n$. Protože počet diagonál je $n-3$, stačí dokázat, že je dělitelný třemi. Budeme diagonály po třech odebírat. Nechť už jsou nějaké odebrané. Vyrazíme z jednoho vrcholu, vezmeme první diagonálu po směru hodinových ručiček, která z něj vychází. Přejdeme po ní, vezmeme první další diagonálu proti směru hodinových ručiček, která vychází z tohoto vrcholu. Toto opakujeme, dokud neskončíme ve vrcholu, kde už jsme byli. Protože jsme brali vždy první diagonálu proti směru hodinových ručiček (kromě první), museli jsme dokonce skončit v původním vrcholu a obešli jsme mnohoúhelník, v němž nejsou žádné neodebrané diagonály. Protože vždy začínáme s první diagonálou po směru hodinových ručiček, nemohli jsme z něj dřív nějaké diagonály odebrat, tedy je to trojúhelník. Odebereme tedy tři diagonály, které jsme prošli, a pokračujeme. Na konci nám nemohou zbýt žádné diagonály díky tomu, že počet diagonál vycházejících z libovolného vrcholu je vždy sudý.

Konstrukci uděláme indukcí.

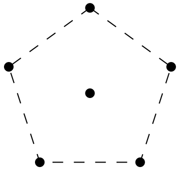
22. Vybereme si nějakou triangulaci n-úhelníku a obarvíme jeho vrcholy třemi barvami tak, aby každý trojúhelník měl vrcholy různých barev. Pak umístíme hlídače do vrcholů té barvy, kterou jsme použili nejméněkrát. Hlídačů jsme umístili nejvýše $\frac{n}{3}$ a každý trojúhelník zvolené triangulace má hlídače v právě jednom vrcholu. Každý bod je v nějakém trojúhelníku triangulace, tedy na něj některý hlídač vidí.

23. Pro stranu A_1A_2 n-úhelníku K označíme X ten vrchol K, pro nějž je úhel A_1XA_2 nejmenší. Pak A_1XA_2 je pokrývací trojúhelník. Označme K_1 průnik K s polorovinou danou přímkou A_1X, v níž není A_2, K_2 symetricky. Protože vrcholy K_1 jsou uvnitř kružnice opsané A_1XA_2, každý pokrývací trojúhelník K_1 je i pokrývací trojúhelník K, obdobně pro K_2. Postup tedy opakujeme, dokud nemáme triangulaci z pokrývacích trojúhelníků. Kdyby existoval jiný pokrývací trojúhelník, musela by jedna jeho strana, označme ji XY, protínat nějakou diagonálu naší triangulace, označme ji ST. Protože X a Y jsou uvnitř kružnice nad ST, platí $|\sphericalangle SXT| + |\sphericalangle SYT| > 180^\circ$, obdobně $|\sphericalangle XSY| + |\sphericalangle XTY| > 180^\circ$. Takže další pokrývací trojúhelník tam být nemůže, protože pak bychom měli čtyřúhelník se součtem úhlů větším než 360°.

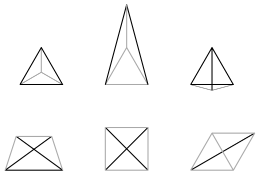
24.



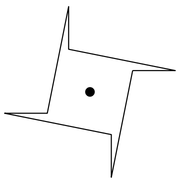
25.



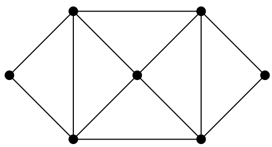
26.



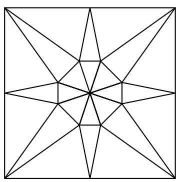
27.



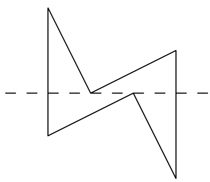
28.



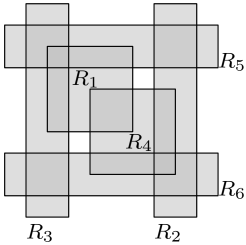
29.



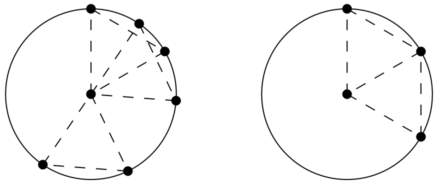
30.



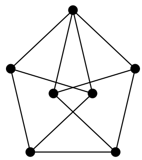
31.



32. Pro liché n stačí vzít několik rovnostranných trojúhelníků sdílejících vrchol jako na obrázku vlevo. Pro sudé n dva z těchto trojúhelníků slepíme stranou jako na obrázku vpravo.



33.



34. Budeme nafukovat kružnici se středem A. Začneme se samotným A a nikdy nepřestaneme protínat mnohoúhelník, který kružnicí protínáme. Pokud skončíme dřív, než protneme všechny, musí být některý mnohoúhelník uvnitř kružnice a jiný ostře vně, což je spor s tím, že se každé dva mnohoúhelníky protínají.

35. Vezmeme libovolný bod S, okolo kterého budeme přímku otáčet. Začneme tím, že k němu zvolíme jakýkoli další bod A a těmito dvěma body povedeme přímku. Rozdíl počtu bodů na jedné a na druhé straně označíme r. Otáčením přímky se r zvětší nebo zmenší o 1, podle toho, na kterou stranu se dostane A. Až narazíme na další bod, opět se o změní o 1 podle toho, kde tento bod byl. Takto otočíme přímku o 180°. Potom r je opačné k tomu, jaké bylo na začátku, tedy někdy muselo být 0. Když bylo 0, byla otáčející se přímka přesně ta, kterou hledáme.

36. Začneme s kružnicí, na níž leží jeden z našich bodů, ale uvnitř ní žádný není. Začneme posouvat její střed v nějakém směru, přičemž na ní stále bude první bod, dokud nenarazíme na další bod. Potom posouváme její střed po ose těchto dvou bodů, dokud nenarazíme na třetí, čímž jsme našli požadovanou kružnici.

37. Určitě umíme najít jeden směr, který není kolmý na žádnou přímku. Pepa začne přede všemi průsečíky, bude postupovat v tomto směru a číslovat průsečíky v pořadí, ve kterém je potká. Představit si to můžeme jako zametání jednou přímkou, která není rovnoběžná s žádnou zadanou.

38. Vezměme dvě přímky tvořící kříž, rovnoběžné s osami, aby všechny obdélníky byly dole a napravo od nich. Potom s přímkami budeme posouvat dolů a doprava tak, aby nikdy nepřestaly protínat obdélník, který už protínají. Co by to znamenalo, kdybychom nemohli pohnout ani jednou z přímek a stále bychom neprotínali všechny obdélníky? Potom by musel být nějaký obdélník ostře vpravo dole od našich přímek, zároveň by každá z těchto přímek musela ležet na hranici nějakého obdélníku, který je pouze nahoru nebo nalevo od nich. Tyto obdélníky by tedy porušili zadání a nemůže se nám to stát.

39. Vezmeme libovolné dva body $A, B \in S$. Jednu polorovinu určenou AB označíme ρ, druhou σ. Budeme zametat kruhem, který má na obvodu A a B a na začátku bude obsahovat všechny body S z ρ, na konci všechny ze σ. Body z ρ budou z kruhu postupně mizet, body ze σ se naopak budou přidávat. Kdyby nejprve všechny z ρ zmizely a pak se všechny ze σ přidaly, má A a B na hranici jen jeden dobrý kruh, protože jen v jedné polorovině je alespoň $n-1$ bodů. Proházíme body, aby se tohle stalo a nezměnila se parita. Když vezmeme $X \in \rho$ a $Y \in \sigma$ takové, že X zmizí těsně po přidání Y, posuneme X o kousek na X' tak, aby X zmizelo před přidáním Y, ale pořadí jiných bodů se nezměnilo. Kruhy ABY a ABX obsahují stejně bodů z S, stejně tak ABY a ABX'. Tedy jsme buď o dva dobré kruhy přišli, nebo se dva přidaly, nebo se jejich počet nezměnil, každopádně parita zůstává stejná.

40. Rozdělme si trojúhelník na tři menší s vrcholem v jediném vnitřním mřížovém bodě. Všechny tyto trojúhelníky nemají uvnitř ani na stranách žádné mřížové body, takže z Pickovy formule mají všechny stejný obsah, a to $\frac{1}{2}$. To už ale nutně znamená, že se jedná o těžiště. Těžiště je totiž jediný bod, který dělí trojúhelník na tři části se stejným obsahem.

41. Použijeme podobnou myšlenku jako u slepování mnohoúhelníků. Budeme postupovat indukcí podle počtu děr. Mějme mnohoúhelník P s h dírami, i vnitřními body a b body na hranici. Ať nová díra Q má i' vnitřních bodů a b' bodů na hranici. Obsahy P a Q postupně označíme S a S'. Potom je obsah P bez Q roven

$$\begin{aligned} S - S' &= \left(i + \frac{b}{2} + h - 1\right) - \left(i' + \frac{b'}{2} - 1\right) \\ &= (i - i' - b') + \frac{b + b'}{2} + (h+1) - 1, \end{aligned}$$

jak jsme chtěli dokázat.

42. Stačí nám spočítat počet způsobů, jak z mincí o hodnotě 2 a 3 poskládat částku nejvýše 2022, zbytek můžeme vždy jednoznačně doplnit mincemi o hodnotě 1. Tyto možnosti můžeme reprezentovat jako počet mřížových bodů v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a mají délky $\frac{2022}{2} = 1011$ a $\frac{2022}{3} = 674$. Mřížový bod se souřadnicemi (x, y) reprezentuje případ, kdy použijeme x mincí hodnoty 2 a y mincí hodnoty 3. Tento trojúhelník má obsah $\frac{1}{2} \cdot 1011 \cdot 674 = 340707$. Na jeho odvěsnách je 1012 a 675 mřížových bodů. Největší společný dělitel 1011 a 674 je 337, na přeponě je tedy 338 mřížových bodů. Trojúhelník má tedy na obvodu $1012 + 657 + 338 - 3 = 2022$ mřížových bodů. Z Pickovy formule dostáváme, že jich uvnitř má $340707 - \frac{2022}{2} + 1 = 339697$. Celkový počet mřížových bodů (způsobů zaplacení) tedy je $339697 + 2022 = 341719$.

43. Když naše body budou mít celočíselné souřadnice, budou obsahy všech trojúhelníků s vrcholy v nich podle Pickovy formule racionální. Stačí nám tedy najít n mřížových bodů v obecné poloze takových, že vzdálenost každých dvou je iracionální. První z nich umístíme na pozici $(0, 0)$. Nyní předpokládejme, že už máme umístěných prvních k bodů na souřadnicích (x_1, y_1), ..., (x_k, y_k). Zvolíme $x_{k+1} = \max\{x_1, \ldots, x_k\} + 1$ a dále zvolíme y_{k+1} tak, aby pro každé $i \leq k$ splňovalo $(y_{k+1} - y_i + 1)^2 - (y_{k+1} - y_i)^2 > (x_{k+1} - x_i)^2$. Potom by byla druhá mocnina vzdálenosti nově přidaného a i-tého bodu z Pythagorovy věty více než $(y_{k+1} - y_i)^2$, ale méně než $(y_{k+1} - y_i + 1)^2$. Tudíž vzdálenost těchto dvou bodů by byla iracionální. Stačí ovšem zvolit hodně velké y_{k+1}, protože rozdíl dvou po sobě jdoucích čtverců s rostoucím y_{k+1} roste. Volbou dostatečně velkého y_{k+1} také zařídíme, že žádné tři body nebudou na přímce.

44. Označme zadaný bod a mnohoúhelník x a M. Ve středové souměrnosti podle x se mřížové body zobrazí na mřížové body. Sjednocení M a jeho obrazu tvoří mnohoúhelník, možná s dírami, protože mají společný alespoň bod x. Pokud by se mřížový bod M zobrazil do M, měli bychom hotovo, pro spor nechť to tak není. Potom se body z hranice a vnitřku zobrazí postupně na hranici a dovnitř. Tudíž z Pickovy formule vyjde, že obsah sjednocení M a jeho obrazu je více než dvakrát obsah M (spočítaný z Pickovy formule), což je spor.