Kombinatorická geometrie I – Všehochuť

Milý příteli,
do rukou se Ti dostává první díl letošního seriálu, v němž si povíme o oblasti matematiky zvané kombinatorická geometrie. V klasické geometrické úloze většinou dostaneme zadanou konfiguraci, která obsahuje několik málo bodů, přímek a kružnic, a máme třeba ukázat, že nějaké úhly nebo úsečky jsou shodné. V kombinatorické geometrii většinou pracujeme s mnohem obecnějšími konfiguracemi – typicky dostaneme nějakou množinu n bodů nebo n přímek v rovině. Takové n může být daleko víc, než kolik bodů si dokážeme nakreslit. A tak naším úkolem nebude si vzít barvičky a začít vyznačovat všechny shodné úhly, protože to většinou ani nepůjde. Spíš bude potřeba vymyslet, jak si ve všech těch bodech udělat pořádek, aby se ze zběsilé hromady stalo něco uchopitelného. Třeba si z té hromady vezmeme jen něco nebo z ní budeme brát věci ve správném pořadí. Jak už asi začínáš tušit, kombinatorická geometrie má ve skutečnosti mnohem blíž ke kombinatorice než ke geometrii. Přestože pracujeme s geometrickými objekty, úlohy budeme řešit kombinatorickými úvahami. Tak zahoď úhloměr a pravítko a pojď na to!

Kdyby sis nevěděl(a) rady s nějakou úlohou, nebyl by Ti jasný nějaký důkaz nebo by sis prostě jen chtěl(a) popovídat o kombinatorické geometrii, neváhej nám napsat mail na adresy *pepa@prase.cz* a *magdalena.misinova@gmail.com*.

Podnětné čtení Ti přejí

Pepa Minařík a Majda Mišinová

Jak číst seriál

V tomto díle seriálu si nebudeme dokazovat žádné složité věty, ale ukážeme si několik technik, které mohou být užitečné k řešení úloh. V každé sekci nejdříve najdeš krátký popis dané metody a potom řešené **příklady**. Vřele doporučujeme, aby ses nad příklady nejdřív chvilku zamyslel(a) sám (sama) a až potom si přečetl(a) řešení. I když příklad nevyřešíš, získáš nějakou intuici za tím, v čem je vlastně problém, a řešení potom bude dávat větší smysl.

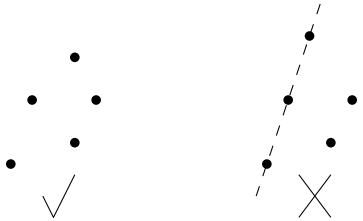
Někdy nemusí být jasné, jak jsme na řešení přišli a proč Tě mělo napadnout udělat zrovna tohle. Nenech se tím ale odradit, čím více úloh vyřešíš, tím snadněji Tě napadne, jaký trik zrovna použít. Po řešených příkladech obvykle následuje několik **Úloh** na procvičení. Kdyby sis s nějakou nevěděl(a) rady, na konci dílu najdeš nápovědu a řešení. Tato řešení nemusí být úplně podrobná, věříme, že potřebné detaily si zvládneš doplnit. Do soutěžní série ale tyto detaily napsat nezapomeň. Kromě úloh se v textu objeví i pár **Cvičení**. Cvičení by obvykle měla být relativně přímočará a jejich řešení nemusí nutně využívat aktuálně probíranou techniku.

Definice

Než se pustíme do řešení úloh, pojďme si definovat několik pojmů. Nebude to nic složitého, jenom se hodí si je ujasnit.

Mnoho úloh pracuje s množinou bodů v rovině. Často se vyžaduje, aby žádné tři neležely na přímce. To může být z různých důvodů – obvykle se tím vyhneme potřebě řešit ošklivé speciální případy a někdy by bez této podmínky úloha ani neplatila.

Definice. O množině bodů v rovině říkáme, že je v *obecné poloze*, jestliže žádné tři z nich neleží na jedné přímce.

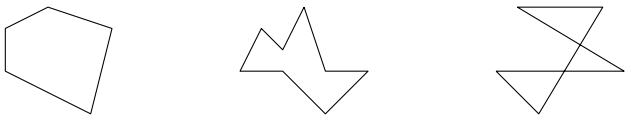


Co je mnohoúhelník asi každý ví, ale pojďme si ho přece jen definovat trochu formálněji.

Definice. *Mnohoúhelníkem* nebo *n-úhelníkem* $A_1A_2\dots A_n$ rozumíme množinu bodů tvořících úsečky A_1A_2, A_2A_3, $\dots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, kde $A_i \neq A_j$ pro $i \neq j$ a úsečky se protínají pouze v krajních bodech.

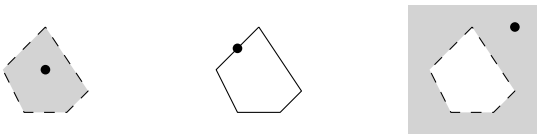
Definice. Mnohoúhelník je *konvexní*, jestliže jsou všechny jeho vnitřní úhly menší než $180°$.

Konvexitou se budeme hodně zabývat v druhém díle seriálu. O mnohoúhelnících nepředpokládáme, že jsou konvexní, pokud to explicitně nenapíšeme. Chceme-li zdůraznit, že mnohoúhelník nemusí být konvexní, řekneme, že je *ne nutně konvexní*. V definici explicitně zakazujeme protínání stran, občas je ale vhodné tuto podmínku z definice vynechat, pokud to ale uděláme, vždy to zdůrazníme.



Konvexní Nekonvexní Protínající se

Budeme rozlišovat, jestli bod (nebo jiný objekt) leží *uvnitř*, nebo *na hranici* mnohoúhelníku. Když bod leží uvnitř, znamená to, že **ne**může ležet na hranici.



Uvnitř Na hranici Vně

Definice. *Diagonála* mnohoúhelníku je úsečka spojující dva jeho nesousedící vrcholy.

Definice. *Vnitřní* diagonála mnohoúhelníku je taková jeho diagonála, která až na krajní body leží celá uvnitř něj.

U konvexních mnohoúhelníků pojem diagonály a vnitřní diagonály splývá, u nekonvexních je ale důležité mezi nimi rozlišovat.

Extremální princip

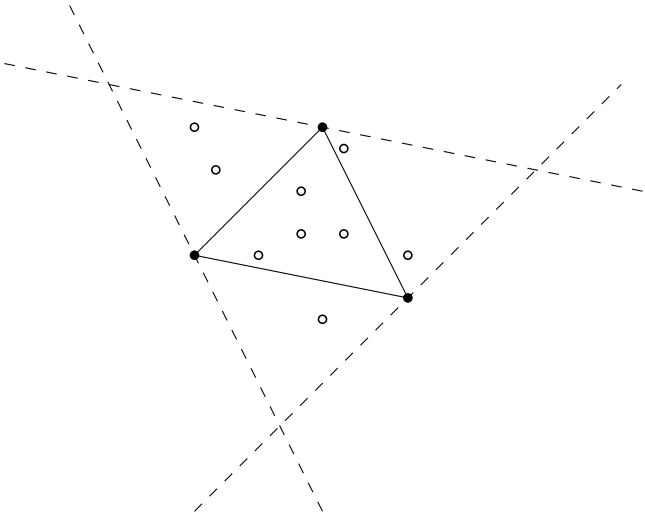
Když je v úloze spousta bodů, vzdáleností a kdo ví čeho, bývá užitečné v ní nějak uklidit. Třeba tak, že se podíváme na jednu vzdálenost a všechno budeme vztahovat k ní. Aby nám to ale dalo co nejvíce, hodí se vybrat si takovou, která je v nějakém smyslu speciální. Co a v jakém smyslu speciálního chceme vybrat, nemusí být na první pohled vůbec jasné. Když máme nějaké objekty v rovině nebo prostoru, můžeme se zaměřit na:

- ten nejmenší/největší,
- ten nejvíc vlevo/vpravo/nahoře/dole,
- ten s nejmenším/největším obsahem/objemem/obvodem,
- nejbližší/nejvzdálenější dvojice,
- největší/nejmenší úhel,
- cokoli dalšího Tě napadne.

Možností je spousta, pojďme si raději ukázat nějaké příklady. Ten následující ukazuje velmi typické využití extremálního principu. Můžeš si rozmyslet, že když uvážíme libovolný trojúhelník, nic moc nám to nedá.

Příklad. V rovině je konečná množina bodů S taková, že každý trojúhelník s vrcholy v S má obsah nejvýše 1. Dokaž, že celá S se dá schovat do trojúhelníku o obsahu 4. (Putnam 2016)

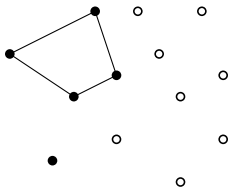
Řešení. Uvažme trojúhelník s vrcholy v S o největším obsahu a označme jeho vrcholy A, B a C. Dokresleme přímku rovnoběžnou s AB procházející vrcholem C. Kdyby nějaký bod D ležel na opačné straně této přímky než body A a B, měl by trojúhelník ABD větší obsah než ABC. Když takto dokreslíme i symetrické rovnoběžky, zjistíme, že vytínají trojúhelník, ve kterém musí ležet všechny body množiny S! Tím jsme ovšem hotovi, protože obsah tohoto trojúhelníku je čtyřnásobek obsahu ABC (trojúhelník ABC je tvořený středními příčkami velkého trojúhelníku).



Následující příklad ukazuje úplně jiný způsob, jak extremální princip využít.

Příklad. Dokaž, že když v rovině leží $n \geq 5$ bodů v obecné poloze, je možné z nich vybrat čtyři tvořící konvexní čtyřúhelník, který uvnitř nemá žádný další bod.

Řešení. Není moc těžké tvrzení dokázat pro $n = 5$. K dokázání tvrzení pro obecné n stačí uvážit pět bodů nejvíce vlevo! Kdyby to nebylo jednoznačné, dáme přednost bodu, co je více nahoře. Mezi pěti body nejvíce vlevo existuje hledaný čtyřúhelník a uvnitř něj nemůže ležet žádný jiný bod.

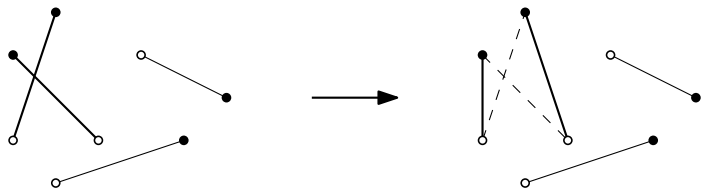


Cvičení 1. Rozmysli si, že tvrzení platí pro $n = 5$.

Někdy může být volba minimalizované veličiny docela triková. Známým příkladem je třeba následující úloha.

Příklad. V rovině leží n černých a n bílých bodů. Dokaž, že je možné popárovat černé body s bílými tak, že se úsečky spojující páry nebudou protínat.

Řešení. Předpokládejme, že jsme popárovali body tak, že je součet délek úseček spojujících páry minimální. Co kdyby se nějaké dvě úsečky protínaly? Potom bychom mohli tyto páry prohodit a z trojúhelníkové nerovnosti bude součet vzdáleností menší. To znamená, že když je součet vzdáleností nejmenší, žádné dvě úsečky se nemůžou protínat!



Úloha 1. Je dáno $n \geq 3$ bodů v rovině obarvených třemi barvami tak, že každá barva je zastoupena. Dokaž, že lze vybrat tři body, od každé barvy jeden, aby uvnitř trojúhelníku s těmito vrcholy nebyly žádné další zadané body.

Úloha 2. Na louce stojí n politiků, kde n je liché číslo větší než dva. Neexistují dvě dvojice politiků takové, že by vzdálenosti mezi politiky v těchto dvojicích byly stejné. Každý politik má jedno vajíčko. Všichni najednou ho hodí, každý do tváře tomu politikovi, který k němu stojí nejblíž. Dokaž, že existuje politik, který potom nemá na tváři vajíčko. (PraSe 40–4p–2)

Úloha 3. Ať $P = P_1P_2 \ldots P_n$ je mnohoúhelník takový, že pro každé $i \neq j$ existuje k takové, že $|\sphericalangle P_iP_kP_j| = 60°$. Dokaž, že nějaké tři vrcholy P tvoří rovnostranný trojúhelník.

Úloha 4. Zdeněk s Petrem hrají následující hru. Zdeněk vybere kladné celé číslo n. Petr nakreslí na papír n modrých bodů. Potom Zdeněk některé z těchto bodů přebarví na červeno. Obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami papíru, nazveme *rozumný*. Petr vyhraje, pokud zvládne nakreslit rozumný obdélník, který obsahuje[1] všechny červené body, ale žádný modrý bod, jinak vyhraje Zdeněk. Pro jaké nejmenší n Zdeněk vždy vyhraje? (Rioplatense 1997)

[1] Bod je obsažen v obdélníku, pokud leží uvnitř něj nebo na jeho hranici.

Úloha 5. Uvnitř konvexního mnohoúhelníku M je dán bod O. Dokaž, že kolmá projekce bodu O na některou stranu M leží uvnitř této strany.

Úloha 6. Je dáno n bodů v rovině v obecné poloze. Dokaž, že existuje neprotínající se mnohoúhelník s vrcholy v těchto bodech.

Úloha 7. Najdi všechny konečné množiny S bodů v rovině v obecné poloze, pro které platí, že pro každé tři body z S existuje čtvrtý bod v S, který s nimi tvoří rovnoběžník. (Čína TST 2008)

Úloha 8. V rovině je konečný počet červených a modrých přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Pro každý průsečík dvou přímek stejné barvy platí, že jím prochází i přímka barvy opačné. Dokaž, že všechny tyto přímky prochází jedním bodem. (Rusko 2002)

Úloha 9. (Sylvester–Gallai) Nechť S je konečná množina bodů v rovině taková, že na žádné přímce neleží právě dva body. Dokaž, že všechny body v S leží na jedné přímce.

Parita

To, že sudé číslo není liché a naopak, asi není žádné velké překvapení. V mnohých kombinatorických úlohách to ale je zásadní krok v řešení. Protože je to důležitá vlastnost čísel, vysloužila si vlastní pojmenování – parita. Obzvlášť když chceme ukázat, že něco neexistuje, může se vyplatit se nad ní chvilku zamyslet. Následující příklad ukazuje, jak spočítat dvakrát paritu nějakého počtu může pomoct.

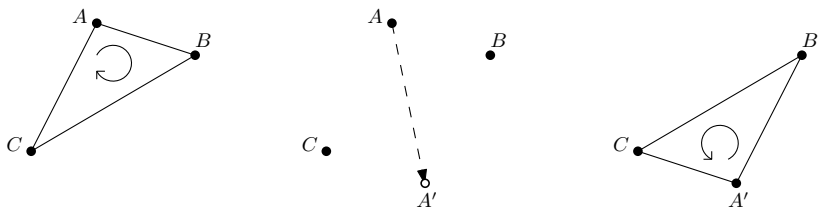
Příklad. Je do roviny možné nakreslit devět úseček tak, aby každá úsečka protínala právě tři jiné úsečky? (PraSe 41–1j–3)

Řešení. Možné to není. Spočítejme celkový počet uspořádaných dvojic úseček, co se protínají. První úsečku můžeme vybrat devíti způsoby a druhou třemi, celkový počet možností je $9 \cdot 3 = 27$. Uvažme nějaké dvě úsečky a a b. Jestliže a protíná b, potom taky b protíná a. To znamená, že každé „protnutí“ se započítá dvakrát. Dostáváme spor, protože 27 je liché číslo.

V dalším příkladě jedno číslo, u kterého bychom mohli zkoumat paritu, dostaneme rovnou v zadání. Spočítat jeho paritu podruhé je ale trikovější.

Příklad. Na kluzišti trénuje hokejista. Má tři puky, které leží ve vrcholech nedegenerovaného trojúhelníku. Pokaždé si jeden vybere a odpálí ho tak, aby proletěl mezi zbylými dvěma (a aby opět vznikl nedegenerovaný trojúhelník). Může je 2023. odpalem vrátit do původní polohy tak, aby každý puk byl tam, kde začínal?

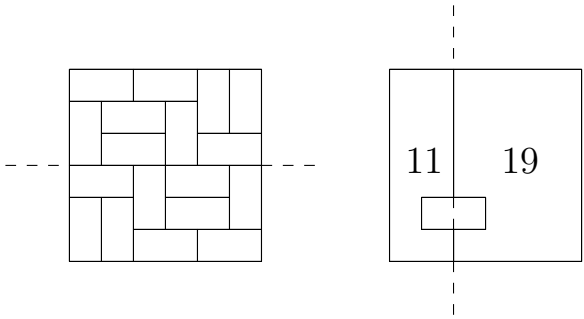
Řešení. Označme si hokejistovy puky A, B a C. Uvažme orientaci trojúhelníku ABC. Orientace trojúhelníku je dána tím, v jakém pořadí jsou na něm body ABC – buď můžou jít po, nebo proti směru hodinových ručiček. Co se stane, když hokejista odpálí puk? Orientace trojúhelníku se změní! Orientace trojúhelníku se změní s každým odpalem, takže po lichém počtu odpalů nemůžeme skončit v původní poloze.



V kombinatorické geometrii občas potkáme i nějakou tabulkovou úlohu.

Příklad. Čtvercový dort s rozměry 6×6 je pokrytý kousky čokolády 2×1. Dokaž, že ho vždy můžeme rozkrojit rovným řezem na dvě části, aniž bychom krájeli kousek čokolády.

Řešení. Máme k dispozici 10 různých svislých a vodorovných řezů a každý kousek čokolády může zablokovat nejvýše jeden z nich. Bohužel kousků čokolády je 18, což je víc než 10. Naštěstí nás zachrání parita. Mohlo by se stát, že by nějaký řez protínal jenom jeden kousek čokolády? Nemohlo! Na obou stranách řezu by potom zbýval lichý počet políček, takže by nebylo možné je pokrýt kousky čokolády velikosti 2. Na zablokování řezu jsou tedy potřeba aspoň dva kousky čokolády, takže vždy zůstane aspoň jeden volný, protože $\frac{18}{2} = 9 < 10$.

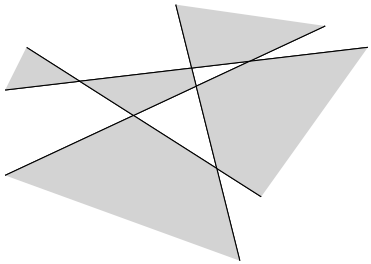


V dalším příkladu nepoužijeme paritu ve standardním slova smyslu, ale pořád se jedná o úvahu podobného stylu.

Příklad. V rovině je dáno 2017 přímek takových, že žádné tři z nich neprochází jedním bodem. Hlemýžď Turbo se nachází v nějakém bodě právě jedné z daných přímek a začíná se pohybovat po těchto přímkách podle následujícího pravidla: Pohybuje se po dané přímce do doby, dokud nedorazí do průsečíku dvou daných přímek. Od tohoto průsečíku pokračuje v pohybu po jiné přímce, přičemž se vydá buď doprava, nebo doleva, a to střídavě v po sobě následujících průsečících přímek. Směr může měnit jedině v průsečících daných přímek. Může existovat nějaká úsečka na některé z daných přímek, po které Turbo během své cesty projde v obou směrech? (EGMO 2017–3)

Řešení. Přímky nám rovinu dělí na několik oblastí. Tyto oblasti obarvíme modře a červeně tak, aby sousedící oblasti měly různé barvy. O dvou oblastech řekneme že sousedí, pokud mají společnou část hranice. Na první pohled nemusí být jasné, že oblasti lze takhle obarvit. Můžeme to ukázat indukcí. Začneme s prázdnou jednobarevnou rovinou a budeme postupně přidávat přímky. Vždy když přidáme přímku, rozdělí nám rovinu na dvě části a my změníme barvu všech oblastí v jedné z těchto částí. Je zřejmé, že takto dostaneme vyhovující obarvení.

Předpokládejme, že Turbo má na začátku po levém boku červenou oblast. Jakmile dojde ke křižovatce, zatočí doleva nebo doprava. Nezávisle na tom ovšem bude mít po levém boku stále červenou oblast. Vidíme, že Turbo bude mít po celou dobu nalevo od sebe červenou, takže po každé úsečce může projít jenom v jednom směru.



Úloha 10. Je dáno devět bodů v prostoru, všechny z nich mají celočíselné souřadnice. Dokaž, že z nich můžeme vybrat dva body A a B takové, že střed úsečky AB má také celočíselné souřadnice.

Úloha 11. V rovině leží n bodů, označme jejich množinu S. Když vybereme libovolné dva body z S, lze k nim najít třetí bod z S, který má od obou z nich stejnou vzdálenost. Zároveň ale platí, že nelze vybrat čtyři body z S tak, aby jeden z nich byl středem kružnice opsané zbylým třem. Dokaž, že n je liché. (IMO 2015–1b)

Úloha 12. Uvnitř $2n$-úhelníku sedí liška. Ze všech vrcholů po ní najednou vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokaž, že některá strana byla zasažena dvakrát.

Úloha 13. Šachovnice 8×8 je vydlážděna dominy. Dokaž, že počet vodorovných domin, jejichž levé políčko je bílé, je stejný jako počet vodorovných domin, jejichž pravé políčko je bílé.

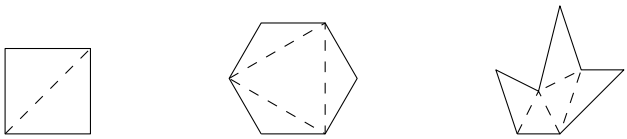
Úloha 14. Malíř Dláža namaloval pravidelný $(2n+1)$-úhelník. Malířky Klátra a Klárka hrají hru, při níž se střídají v tazích a Klátra začíná. Ve svém tahu namalují dosud nenamalovanou úhlopříčku $(2n+1)$-úhelníku, která protne sudý počet již namalovaných úhlopříček ve vnitřních bodech. Malířka, která nemůže táhnout, prohrává. Zjisti v závislosti na n, kdo má vyhrávající strategii. (PraSe 41–4j–1a)

Úloha 15. Ať $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ je nějaká permutace vrcholů pravidelného $2n$-úhelníku. Označme $P_{2n+1} = P_1$. Dokaž, že existuje i a j takové, že P_iP_{i+1} je rovnoběžné s P_jP_{j+1}.

Triangulace

Další způsob, jak si v úloze uklidit, se zaměřuje na mnohoúhelníky. Když máme jeden velký a složitý mnohoúhelník, můžeme si ho rozdělit na několik menších. A když už ho rozdělujeme na menší, proč ho rovnou nerozdělit na ty úplně nejjednodušší, na trojúhelníky?

Definice. *Triangulací* mnohoúhelníku rozumíme jeho rozdělení na trojúhelníky pomocí neprotínajících se vnitřních diagonál.



Než se pustíme do větších tvrzení, pojďme si rozmyslet pár cvičení.

Cvičení 2. Kolik diagonál a kolik trojúhelníků obsahuje triangulace n-úhelníku?

Cvičení 3. Kolik různých triangulací má pravidelný šestiúhelník?

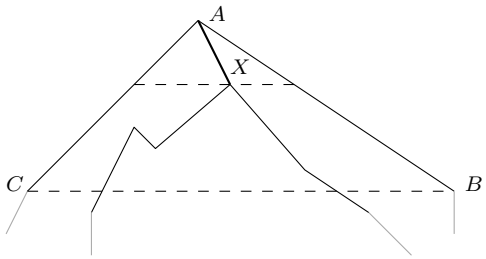
Je docela jasné, že každý konvexní mnohoúhelník má triangulaci, platí to ale i pro nekonvexní mnohoúhelníky? To už tak jasné není, ale odpověď je ano.

Tvrzení. *Každý mnohoúhelník má triangulaci.*

Nejprve si dokažme jedno pomocné lemma.

Lemma. *Každý n-úhelník, kde $n \geq 4$, obsahuje vnitřní diagonálu.*

Důkaz. Začněme tím, že najdeme vrchol, u kterého je konvexní (menší než 180°) úhel a označíme ho A. Sousedy našeho vrcholu označme B a C. Jestliže diagonála BC neprotíná žádnou stranu, jsme hotovi. Uvnitř trojúhelníku ABC tedy musí být nějaké vrcholy mnohoúhelníku. Označme X ten bod, který je nejvzdálenější od přímky BC. Není těžké si rozmyslet, že diagonála AX teď nemůže protínat žádnou stranu našeho mnohoúhelníku, a důkaz je tedy hotov. Kdyby totiž AX protínala nějakou stranu mnohoúhelníku, znamenalo by to, že existuje vrchol mnohoúhelníku uvnitř ABC, který je od strany BC dále než X, což by byl spor.



□

Cvičení 4. Rozmysli si, proč by nefungovalo zvolit za X vrchol uvnitř ABC, který je nejbližší k A.

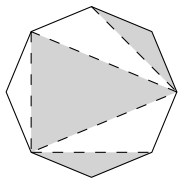
Teď už je důkaz existence triangulace jednoduchý.

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu vrcholů. Pro trojúhelníky zjevně platí. Teď nám stačí dokázat indukční krok. Podle předchozího lemmatu v mnohoúhelníku existuje vnitřní diagonála, nechť je tato diagonála součástí triangulace. Teď už jen stačí triangulovat dva menší mnohoúhelníky, na které je ten původní zvolenou diagonálou rozdělen. Tyto mnohoúhelníky ovšem mají triangulaci z indukčního předpokladu, důkaz je tedy hotov. □

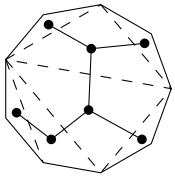
Cvičení 5. Pomocí triangulací si rozmysli, jaký je součet úhlů v n-úhelníku.

Cvičení 6. Dokaž, že každá triangulace n-úhelníku pro $n \geq 4$ obsahuje alespoň dva vrcholy, ze kterých nevede žádná diagonála.

Cvičení 7. Dokaž, že trojúhelníky v triangulaci lze obarvit dvěma barvami tak, aby trojúhelníky sdílející diagonálu měly různou barvu.



Obě předchozí cvičení jde poměrně snadno dokázat indukcí. Existuje ale způsob, jak se této práci vyhnout. Podívejme se nyní na trojúhelníky triangulace jako na „to důležité“ a nakresleme si za každý z nich puntík. Dva puntíky spojíme čárou, pokud příslušné trojúhelníky sousedí stranou. Cože jsme to právě udělali? Nakreslili jsme graf![2] A ne jen ledajaký graf, je to dokonce strom. Jak to víme? Když odebereme hranu, což odpovídá rozříznutí mnohoúhelníku podle jeho diagonály, rozpadne se nám graf (mnohoúhelník) na dvě nesouvislé části. Zároveň celý graf je souvislý, tedy už to musí být strom. A že stromy mají alespoň dva listy nebo že se jejich vrcholy dají obarvit dvěma barvami, aby sousední vrcholy neměly stejnou barvu, už je známá věc.



Tak už máme jednu triangulaci! Když se ale podíváš na nějaký slušný, ne moc nekonvexní mnohoúhelník, asi Tě napadne, že jich může být mnohem víc. Kolik přesně?

Definice. C_n značí n-té *Catalanovo číslo* a udává počet triangulací pravidelného $(n+2)$-úhelníku.

Tohle je jen jeden z mnoha způsobů, jak se na Catalanova čísla dívat. Odpovídá to třeba i počtu validních uzávorkování, počtu cest v mřížce, když chodíme jen doprava a nahoru a nechceme se dostat nad diagonálu, nebo také počtu zakořeněných binárních stromů. Dokonce se dá n-té Catalanovo číslo explicitně vyjádřit, ač na první pohled není jasné, proč to vyjde zrovna tolik.

Tvrzení. *Platí* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Dokázat to, co jsme si zrovna řekli, by chvíli zabralo a není to úplně kombinatorická geometrie, takže se tím zabývat nebudeme.[3]

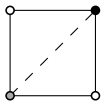
Můžeš si rozmyslet, že pro konvexní mnohoúhelník je počet triangulací závislý jen na počtu vrcholů. Jakmile ale povolíme, aby byl mnohoúhelník nekonvexní, můžou se s počtem triangulací dít všelijaké věci.

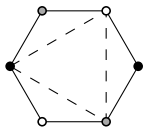
Úloha 16. Pro každé n najdi mnohoúhelník, který má právě n triangulací. (Rumunsko 2019)

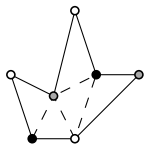
Úloha 17. Pro každé n najdi n-úhelník, který má pouze jednu triangulaci.

Triangulace se stane ještě mocnější, začneme-li vrcholy mnohoúhelníku barvit.

Příklad. Dokaž, že je možné obarvit vrcholy triangulovaného mnohoúhelníku třemi barvami tak, aby měl každý trojúhelník vrcholy různých barev.







[2] O grafech a dalších pojmech z jejich světa si můžeš něco přečíst tady: *https://prase.cz/archive/34/serial.pdf*.

[3] Pokud Tě Catalanova čísla zaujala a chceš se o nich dozvědět víc, podívej se třeba sem: *https://prase.cz/library/CatalanovaCislaMR/CatalanovaCislaMR.pdf*.

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí, pro trojúhelník zjevně platí. Předpokládejme, že platí pro $(n-1)$-úhelník, a dokažme jej pro n-úhelník. Podle Cvičení 6 v naší triangulaci existuje vrchol, ze kterého nevede žádná diagonála. To znamená, že vede diagonála mezi jeho sousedy, odebráním tohoto vrcholu tedy dostaneme triangulaci $(n-1)$-úhelníku. Tu už podle indukčního předpokladu obarvit umíme, a když přidáme zpět odebraný vrchol, určitě pro něj ještě zbývá jedna barva. □

Úloha 18. V n-úhelníku je umístěno $n-2$ bodů tak, že uvnitř každého trojúhelníku, jehož každá strana je vnitřní diagonála nebo strana mnohoúhelníku, leží aspoň jeden. Dokaž, že v každém takovém trojúhelníku potom leží právě jeden.

Úloha 19. Lucka upekla dort ve tvaru pravidelného n-úhelníku, kde $n > 4$. Nejprve jej po obvodu potřela polevou a následně jej několika rovnými řezy rozřezala na trojúhelníkové dílky, jejichž všechny vrcholy jsou vrcholy původního n-úhelníku. Dokaž, že dílků, které mají dvě své strany potřené polevou, je právě o 2 více než dílků, které nemají polevou potřenou žádnou stranu. (PraSe 40–3j–2)

Úloha 20. Je dán konvexní mnohoúhelník. Dokaž, že má nejvýše jednu triangulaci, jejíž každý trojúhelníků je ostroúhlý. (Rusko 2003)

Úloha 21. Pro která n existuje triangulace konvexního n-úhelníku, v níž z každého vrcholu vychází sudý počet diagonál?

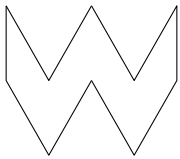
Úloha 22. (Art gallery problem) Půdorys galerie má tvar n-úhelníku (ne nutně konvexního). Dokaž, že je možné do galerie rozmístit nejvýše $\frac{n}{3}$ hlídačů tak, aby viděli každý její bod. Hlídači jsou reprezentovaní bodem a vidí do všech směrů.

Úloha 23. Pro $n \geq 3$ je dán konvexní n-úhelník K, jehož žádné čtyři vrcholy neleží na jedné kružnici. Trojúhelník daný trojicí vrcholů n-úhelníku K nazveme *pokrývací*, pokud jemu opsaný kruh pokrývá K. Dokaž, že pokrývacích trojúhelníků je přesně $n-2$. (PraSe 36–3p–7)

Konstrukce

Nedílnou součástí kombinatorické geometrie jsou konstrukce. Když chceme dokázat, že něco existuje, je většinou nejjednodušší prostě ukázat, jak to vypadá. Je těžké dát nějakou obecnou radu, jak najít tu správnou konstrukci. Často se ale hodí využít symetrií a různých speciálních případů. Co třeba zkusit pravidelný mnohoúhelník? Co kdyby všechny body ležely na kružnici nebo na přímce? V této sekci nebudou řešené příklady, protože nám připadá lepší, když se nad těmito úlohami zamyslíš sám (sama) a řešení je většinou vidět z obrázku. Nápovědu a řešení ke všem úlohám ovšem najdeš na konci tohoto dílu.

Úloha 24. Rozděl následující tvar na sedm shodných částí.



Úloha 25. Je možné do roviny nakreslit šest bodů v obecné poloze tak, aby libovolná trojice tvořila rovnoramenný trojúhelník? (PraSe 42–1p–2)

Úloha 26. (4 points, 2 distances) Majda na papír nakreslila čtyři body a změřila vzdálenosti mezi všemi dvojicemi. Ke svému překvapení zjistila, že naměřila jenom dvě různé hodnoty. Jaké jsou všechny možnosti, jak Majda mohla body nakreslit?

Úloha 27. Existuje mnohoúhelník takový, že uvnitř něj můžeme najít bod, ze kterého není vidět žádná strana celá?

Úloha 28. Najdi v rovině sedm bodů takových, že když libovolný z nich smažeme, je možné mezi zbylými najít čtyři tvořící vrcholy čtverce.

Úloha 29. Je možné rozdělit čtverec na několik ostroúhlých trojúhelníků?

Úloha 30. Najdi šestiúhelník, který lze rozdělit rovným řezem na čtyři shodné trojúhelníky.

Úloha 31. Obdélník v rovině, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, nazveme *osovým*. Najdi osové obdélníky $R_1, \ldots, R_6$ takové, že R_i nemá žádný společný bod právě s obdélníky R_{i-1} a R_{i+1}.[4]

Úloha 32. Dokaž, že pro libovolné $n \geq 3$ lze do roviny umístit n bodů tak, že když vybereme libovolné dva body z nich, lze k nim najít třetí, který má od obou stejnou vzdálenost.

(IMO 2015–1a)

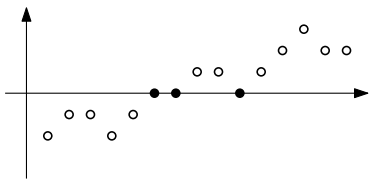
Úloha 33. (Moser Spindle) Umísti do roviny sedm bodů tak, aby libovolný trojúhelník s vrcholy v těchto bodech měl aspoň jednu stranu délky 1.

Diskrétní spojitost a zametání

V této části se podíváme na dvě techniky naráz, protože ač je každá něco trochu jiného, v kombinatorické geometrii se většinou používají dohromady.

Diskrétní spojitost sice může znít děsivě, ale nejedná se o nic složitého. Vlastně to jen říká, že když začneme ve sklepě a dojdeme do patra, přičemž vždy postoupíme jen o jeden schod nahoru nebo dolů, museli jsme projít přízemím. Formálně se to dá napsat třeba následujícím způsobem:

Tvrzení. (Discrete Intermediate Value Theorem) *Nechť $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je funkce, která splňuje $|f(t) - f(t+1)| \leq 1$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Pokud $f(a) \leq f(b)$, kde $a \leq b$, potom pro libovolné k, kde $f(a) \leq k \leq f(b)$, existuje c takové, že $f(c) = k$, a navíc $a \leq c \leq b$.*



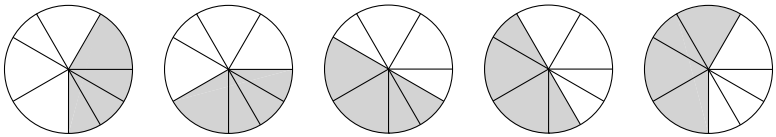
Méně formálně se dá říct, že když se nějaká celočíselná proměnná může měnit nejvýše o 1, potom nabývá všech mezihodnot. To na první pohled vůbec nemusí souviset s geometrií, a vskutku se diskrétní spojitost dá využít leckde jinde. Většinou se jedná o úlohy, kde je nějaký algoritmus nebo proces. My se podíváme na jeden jeho krok, začátek a konec a pomocí diskrétní spojitosti řekneme, že musel nastat nějaký stav. Například že nějaká hodnota musela být někdy nulová.

V kombinatorické geometrii většinou ale žádný proces nemáme, takže si ho musíme sami vyrobit. A to se dělá právě pomocí zametání. Zametání obvykle popisuje techniku, ve které pohybujeme přímkou v nějakém směru, třeba shora dolů. Když přímka potká nějaký bod (nebo nějaký jiný objekt), odpovídá to jednomu našemu kroku v diskrétní spojitosti. Můžeš si to představovat tak, že přímkou „zametáme“ rovinu a sbíráme body. Jaký krok vlastně uděláme, když potkáme bod, záleží na úloze. Nemusíme zametat jenom přímkou, klidně můžeme použít třeba nafukující se kružnici.

[4] Indexujeme cyklicky, tedy $R_{-1} = R_6$ a $R_7 = R_1$.

Příklad. Martin k narozeninám dostal kruhový dort a hned se rozhodl polovinu z něj darovat Zuzce. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků. Právě $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokaž, že Martin i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (PraSe 33–1j–5)

Řešení. Začneme tím, že vybereme libovolných $2k$ po sobě jdoucích dílků. Podívejme se na rozdíl počtu malých a velkých dílků (včetně znaménka, tato hodnota tedy klidně může být záporná). Jestliže je tento rozdíl 0, vybrané kousky tvoří půlkruh a máme hotovo. Teď si všimněme, že tento rozdíl musí být sudý. Nyní začneme „zametat“ okolo středu dortu $2k$-ticí po sobě jdoucích dílků. Co se stane, když vybereme místo prvního až $2k$-tého dílku druhý až $(2k+1)$-ní? Rozdíl počtu malých a velkých dílků se změní o 0 nebo ± 2. Když takto budeme pokračovat, dostaneme se po chvíli do stavu, kdy budou vybrané přesně ty dílky, které nebyly vybrané na začátku. Oproti počátečnímu stavu se tedy změnilo znaménko rozdílu počtu malých a velkých dílků. Z kladného sudého čísla jsme se tedy dostali na záporné sudé číslo (nebo ze záporného na kladné), přičemž se hodnota vždy měnila o 0 nebo 2. To ovšem znamená, že jsme někdy v průběhu museli narazit na nulu! Tím je úloha vyřešena, protože když byl rozdíl nulový, tvořily vybrané dílky půlkruh.



Ačkoli diskrétní spojitost v kombinatorické geometrie bez zametání spíš nepoužiješ, naopak to neplatí. Někdy se hodí zametat prostě třeba jen proto, abychom si zadané objekty nějak uspořádali.

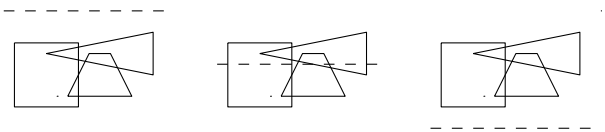
Příklad. V rovině je dáno $3n$ bodů v obecné poloze. Dokaž, že je možné je pospojovat tak, abychom vytvořili n disjunktních trojúhelníků.

Řešení. Rovinu s body si pootočme tak, aby žádné dva neležely na svislé přímce. Potom budeme zametat přímkou zleva doprava a v pořadí, ve kterém potkáváme body, je rozdělujeme do trojic. První tři body tedy budou tvořit první trojúhelník, další tři druhý a tak dále. Žádné dva trojúhelníky se nebudou protínat.

Jak už jsme si řekli, zametání je vlastně takový algoritmus, takže bychom mohli chtít zkoumat, jak, jestli a kdy skončí. K čemu se to může hodit, ukazuje následující příklad.

Příklad. V rovině leží několik mnohoúhelníků tak, že se každé dva protínají. Dokaž, že existuje přímka, která je protíná všechny.

Řešení. Uvážíme vodorovnou přímku. Na začátku umístíme přímku tak, že jsou všechny mnohoúhelníky pod ní. Nyní začněme naší přímkou pohybovat shora dolů. Uvažme množinu mnohoúhelníků, které přímka protíná. Každý mnohoúhelník do množiny jednou přidáme a jednou ho z ní odebereme. Budeme chtít ukázat, že existuje okamžik, kdy tato množina obsahuje všechny mnohoúhelníky. Může se stát, že z ní odebereme mnohoúhelník a zároveň existuje jiný, který jsme tam ještě nepřidali? Stát se to nemůže, protože potom by jeden mnohoúhelník byl nad přímkou a jiný pod ní, takže by se nemohly protínat. To znamená, že do naší množiny nejdříve přidáme všechny mnohoúhelníky a až potom je začneme odebírat.



Úloha 34. V rovině je dán bod A a několik mnohoúhelníků, přičemž každé dva z nich se protínají. Dokaž, že existuje kružnice se středem v A, která je protíná všechny.

Úloha 35. V rovině je dáno $2n$ bodů v obecné poloze. Dokaž, že existuje přímka procházející dvěma z těchto bodů, která dělí body na dvě skupiny o velikosti $n-1$.

Úloha 36. V rovině je několik bodů v obecné poloze. Ukaž, že existuje kružnice procházející alespoň třemi z nich, která ve svém vnitřku neobsahuje žádný další.

Úloha 37. V rovině jsou dány přímky, které se protínají v N bodech. Pepa chce očíslovat tyto body od 1 do N, aby pro každou přímku platilo, že body na ní jsou očíslované v jednom nebo druhém směru v rostoucí pořadí. Může se mu to podařit? (Mexiko 2018)

Úloha 38. V rovině leží několik obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a splňují následující vlastnost: pro libovolné dva obdélníky A a B existuje vodorovná nebo svislá přímka, která protíná A i B. Dokaž, že je možné zvolit jednu vodorovnou a jednu svislou přímku tak, aby každý obdélník byl protnutý aspoň jednou z nich. (iKS 2020/2021, C6)

Úloha 39. Ať S je množina $2n+1$ bodů v rovině v obecné poloze, z nichž žádné čtyři neleží na kružnici. Kruh nazveme *dobrým*, pokud na jeho obvodu leží tři body z S, uvnitř něj leží $n-1$ bodů a zbylých $n-1$ bodů leží vně něho. Dokaž, že skrz každou dvojici bodů z S prochází lichý počet dobrých kruhů. (APMO 1999, upraveno)

Pickova formule

Možná si ještě pamatuješ úlohy ze základní školy, kdy byl v mřížce nakreslený nějaký zběsilý útvar a Tvým úkolem bylo spočítat jeho obsah. V takové úloze jde o to zadaný útvar vyskládat z pravoúhlých trojúhelníků a obdélníků, nebo naopak nakreslit obdélník kolem něj a trojúhelníky odebírat. Protože obsahy obdélníků a pravoúhlých trojúhelníků spočítat umíme, šlo to i se zadaným útvarem. To je víceméně myšlenka Pickovy formule.

Definice. Bod v rovině, jehož obě souřadnice jsou celočíselné, nazveme *mřížovým bodem.*

Úmluva. V této sekci budeme uvažovat pouze mnohoúhelníky s vrcholy v mřížových bodech.

Tvrzení. (Pickova formule) *Nechť M je mnohoúhelník, i počet mřížových bodů uvnitř něj a b počet bodů na jeho hranici. Obsah M potom je $i+\frac{b}{2}-1$.*

Proč by tohle tvrzení mělo dávat smysl? Chceme vlastně spočítat počet „čtverečků“ uvnitř M. To bude přibližně stejně, jako je mřížových bodů v něm. Body na hranici jsou v něm vlastně jen tak „z půlky“, takže je započítáme jen z poloviny. To je hodně neformální intuice, důkaz se bude ubírat spíše tím směrem, který jsme naznačili před tvrzením.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že když Pickova formule platí pro nějaké dva mnohoúhelníky, bude platit i pro mnohoúhelník vzniklý jejich slepením. Potom už bude stačit dokázat platnost pro trojúhelníky, z čehož bude díky lepení a existenci triangulace Pickova formule fungovat pro všechny mnohoúhelníky.

Mějme mnohoúhelník M rozdělený diagonálou na dva menší mnohoúhelníky M_1 a M_2. Ukážeme, že jestliže Pickova formule platí pro M_1 a M_2, musí už nutně platit i pro M. Počet bodů na diagonále oddělující M_1 a M_2 označíme s. Dále označme i_1 a i_2 počet bodů uvnitř M_1 a M_2, b_1 a b_2 počet bodů na jejich hranicích. Uvnitř M je tedy $i=i_1+i_2+s-2$ bodů, na hranici $b=b_1+b_2-2s+2$. Označme obsahy M, M_1 a M_2 postupně S, S_1 a S_2. Předpokládáme platnost Pickovy formule pro M_1 a M_2, takže platí

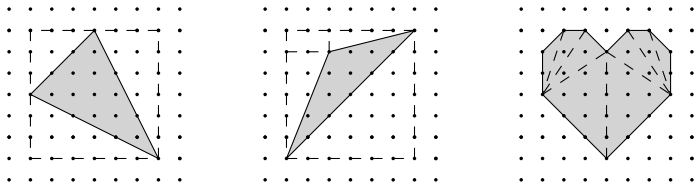
$$S=S_1+S_2=\left(i_1+\frac{b_1}{2}-1\right)+\left(i_2+\frac{b_2}{2}-1\right)=$$
$$=(i_1+i_2+s-2)+\frac{1}{2}(b_1+b_2-2s+2)-1=i+\frac{b}{2}-1,$$

takže Pickova formule funguje i pro M.

Zcela obdobně bychom mohli z platnosti Pickovy formule pro M a M_1 dokázat její platnost i pro M_2. Můžeme tedy mnohoúhelníky nejen slepovat, ale i odřezávat.

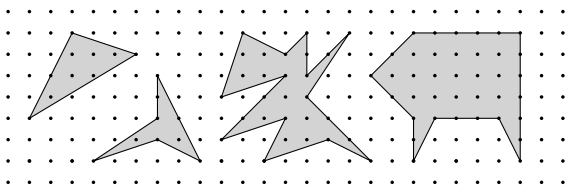
Když máme obdélník se stranami a a b, má na hranici $2a + 2b$ bodů a uvnitř $(a-1)(b-1)$ bodů. Snadno ověříme, že z Pickova vzorce opravdu vyjde jeho obsah, tedy ab. Máme-li pravoúhlý trojúhelník T, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, můžeme ho doplnit shodným trojúhelníkem T' na obdélník. Výsledek Pickovy formule pro T označíme p. Pickova formule vychází stejně pro T a T', tedy pro obdélník bude díky slepování dokázanému výše vycházet $2p$. Pro obdélník však Pickova formule vychází správně, zároveň obsah T je oproti němu poloviční, tedy musí vycházet i pro T.

Teď už můžeme formuli dokázat pro libovolný trojúhelník T. Na to vezmeme nejmenší obdélník, který T obsahuje, a odřežeme z něj pravoúhlé trojúhelníky a obdélníky tak, aby nám zbyl jenom T. Pro obdélníky a pravoúhlé trojúhelníky jsme již Pickovu formuli dokázali, takže dostáváme platnost pro T.



□

Cvičení 8. Jaké obsahy mají následující útvary?

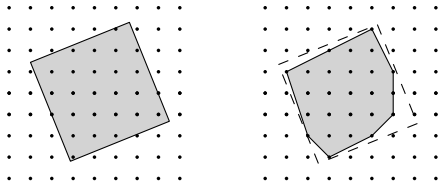


Příklad. Existuje rovnostranný trojúhelník, jehož všechny vrcholy jsou mřížové body?

Řešení. Neexistuje. Předpokládejme, že by takový trojúhelník existoval, označme délku jeho strany a. Obsah tohoto trojúhelníku by potom byl $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Délka a je přitom vzdálenost dvou mřížových bodů, takže a^2 z Pythagorovy věty musí být přirozené číslo. To ale znamená, že S je iracionální, jenže z Pickovy formule musí být dvojnásobek obsahu celočíselný, tudíž S musí být racionální.

Příklad. V rovině leží čtverec $n \times n$ (ne nutně mřížový), dokaž, že nemůže zakrývat víc než $(n+1)^2$ mřížových bodů.

Řešení. Předpokládejme, že takový čtverec existuje a zakrývá $N > (n+1)^2$ mřížových bodů. Zkusíme pomocí Pickovy formule dokázat, že by musel mít obsah větší než n^2. Pickova formule ale bohužel přímo použít nejde, protože náš čtverec není mřížový. Představme si, že je obvod čtverce tvořený gumičkou a mřížové body jsou hřebíky zabodané do roviny. Gumička se stáhne a zasekne se o hřebíky jako na obrázku. Tím dostaneme nějaký útvar, který má obvod i obsah menší než původní čtverec. Nový útvar už je mřížový mnohoúhelník, takže pro něj můžeme použít Pickovu formuli. Kolik nejvíce mřížových bodů může být na jeho obvodu? Každé dva mřížové body mají vzdálenost aspoň 1 a obvod vzniklého útvaru je nejvýše $4n$, takže $b \leq 4n$ a $i = N - b$. Pickova formule říká, že obsah daného útvaru je $S = i + \frac{b}{2} + 1 = N - \frac{b}{2} + 1 > n^2$, což je spor, protože jsme začali se čtvercem $n \times n$ o obsahu n^2.



Úloha 40. Uvažujme mřížový trojúhelník, jehož strany neobsahují kromě samotných vrcholů žádné mřížové body a který ve svém vnitřku obsahuje právě jeden mřížový bod. Nahlédni, že tento vnitřní mřížový bod musí být těžištěm trojúhelníku. (Austrálie 1993)

Úloha 41. (Pick pro děravé mnohoúhelníky) Mějme v rovině mnohoúhelník P s h dírami. Formálně: nechť P vznikne odebráním navzájem disjunktních mřížových mnohoúhelníků $P_1, \ldots, P_h$ od mřížového mnohoúhelníku P_0, přičemž obvody jednotlivých P_i jsou disjunktní s obvodem P_0 i spolu navzájem. Dokaž, že pokud P obsahuje ve svém vnitřku a na svých obvodech po řadě i a b mřížových bodů, pak má obsah $i + \frac{b}{2} + h - 1$.

Úloha 42. Kolika různými způsoby je možné zaplatit částku 2022 za použití mincí o hodnotách 1, 2 a 3? Způsoby zaplacení, které se liší jen pořadím mincí, nepovažujeme za různé.

Úloha 43. Dokaž, že pro $n \geq 3$ existuje n bodů v rovině takových, že vzdálenost libovolných dvou je iracionální a zároveň každé tři tvoří nedegenerovaný trojúhelník s racionálním obsahem. (IMO 1987–5)

Úloha 44. *Půlbodem* nazveme libovolný bod tvaru $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ pro celá čísla a, b. Nahlédni, že libovolný půlbod ležící ostře uvnitř mřížového mnohoúhelníku lze vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body ležící uvnitř nebo na obvodu tohoto mnohoúhelníku.

Závěr

Gratulujeme! Ve většině olympiádních úloh z oblasti kombinatorické geometrie už by Tě nemělo nic překvapit. Ale možná přece jen něco ... Ve druhém díle si zavedeme pojem konvexní množiny a konvexního obalu, které se můžou taky ukrutně hodit. Dokážeme si o nich pár hezkých vět, které sice často vypadají intuitivně, ale dokázat je pořádně chvíli zabere.

Přejeme Ti hodně zdaru při řešení soutěžních úloh a těšíme se na Tebe u druhého dílu!

Návody ke cvičením

1. Rozeber několik konfigurací.

2. Vezmi triangulaci a slepuj postupně trojúhelníčky k sobě.

3. Prostě si je nakresli a využij symetrií.

4. Co kdyby byl úhel ABC hodně tupý?

5. Součet úhlů v trojúhelníku je známý, počet trojúhelníků v triangulaci taky.

6. Zkus na to jít podobně jako v důkazu předchozího tvrzení.

7. Použij předchozí cvičení.

8. Spočítej puntíky.

Návody k úlohám

1. Nejmenší obsah.

2. Stačí ukázat, že existuje politik, který byl trefený dvakrát.

3. Nejdelší vzdálenost.

4. Jak by to bylo na úsečce?

5. Nejbližší strana.

6. Co takhle na to jít podobně jako v příkladu, kde se párovaly body?

7. Trojúhelník s největším obsahem.

8. Najdi konfiguraci čtyř přímek, která tam musí být, a minimalizuj obsah nějakého trojúhelníku.

9. Minimální vzdálenost bodu od přímky.

10. Podívej se na paritu souřadnic.

11. Na ose kolika úseček může jeden bod ležet?

12. Rozděl si mnohoúhelník podle jedné ze střel.

13. Šachovnicové obarvení, jaká domina můžeme rozříznout svislým řezem?

14. Na konci bude zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček.

15. Je $2n$ směrů úhlopříček. Jaká je parita počtu vrcholů, o který se posuneme, když použijeme určitý směr?

16. Zkus třeba $(n+2)$-úhelník.

17. Jak vypadá diagonála, která v triangulaci určitě musí být?

18. Libovolný trojúhelník lze doplnit na triangulaci.

19. Spočítej počet stran trojúhelníků s polevou a počet stran trojúhelníků bez polevy.

20. Využij Cvičení 6 a indukci.

21. Odebírej diagonály. Využij Cvičení 2.

22. Vzpomeň si na příklad s barvením vrcholů triangulace.

23. Najdi triangulaci, která má jen pokrývací trojúhelníky. Pokud o nich nic nevíš, přečti si něco o tětivových čtyřúhelnících a jejich úhlech.

24. Fakt to není těžké.

25. Hmm, pravidelný šestiúhelník nefunguje … Nenapadá Tě jiná symetrická konstrukce?

26. Možností je šest.

27. Zkus ten mnohoúhelník udělat hodně zubatý.

28. Zařiď, aby tam byly tři čtverce.

29. Těch trojúhelníků tam musí být docela hodně, zkus to udělat symetricky.

30. Blesk.

31. Vyber dvě trojice obdélníků, které budou mít neprázdný průnik.

32. Co takhle zkusit dát ty body na kružnici?

33. Začni s dvěma kosočtverci sdílejícími vrchol.

34. Zkus to vyřešit podobně jako ukázkový příklad.

35. Vyber si libovolný bod a rotuj přímkou.

36. Nafukuj kružnici.

37. Urči jeden směr.

38. Zametej dvěma přímkami naráz.

39. Seřaď si zbylé body podle úhlů a pak je prohazuj.

40. Rozděl si trojúhelník na tři menší. Co víš o jejich obsazích?

41. Jednoduše odečti pickovské obsahy děr.

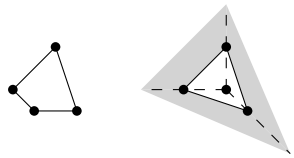
42. Jedničky lze vždy jednoznačně doplnit. Interpretuj validní způsoby zaplacení jako mřížové body překryté jistým trojúhelníkem.

43. Pickovou formulí zařiď racionální obsahy.

44. Středově zobraz mnohoúhelník podle půlbodu a počítej obsahy. Pozor, mohou vzniknout díry!

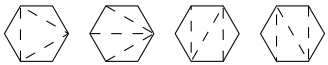
Řesení cvičení

1. Podívejme se na 4 body nejvíc vlevo, pokud tvoří konvexní čtyřúhelník jsme hotovi. Druhá možnost je trojúhelník s bodem uvnitř. Podle tohoto bodu můžeme rozdělit rovinu na tři části. Ať už je zbývající bod kdekoli, vytvoří konvexní čtyřúhelník.

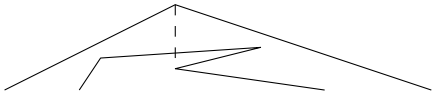


2. Vyjde to $n-3$ a $n-2$.

3. Má jich 14, jsou to rotace následujících možnosti.



4.



5. Stačí sečíst velikosti vnitřních úhlu všech trojúhelníků v nějaké triangulaci, to je $(n-2)\cdot 180°$.

6. Můžeme to dokázat indukcí, prostě vybereme nějakou vnitřní diagonálu a v obou částech z indukce vybereme jeden vrchol, ze kterého nevede žádná diagonála.

7. Využijeme předchozího cvičení a zase použijeme indukci. Vezmeme trojúhelník triangulace takový, že z nějakého jeho vrcholu nevede žádná diagonála a odřízneme jej. Zbytek teď umíme obarvit z indukce a nakonec stačí dobarvit odříznutý trojúhelník.

8. Zleva doprava: 7, $\frac{9}{2}$, $\frac{35}{2}$, 26.

Řesení úloh

1. Uvažme různobarevný trojúhelník ABC s nejmenším obsahem. Kdyby uvnitř byl nějaký bod X, bude mít stejnou barvu jako některý z vrcholů ABC, bez újmy na obecnosti A. Potom XBC je také trojbarevný trojúhelník, ale s menším obsahem než ABC, spor.

2. Pokud existuje politik, kterého trefila dvě vajíčka, na nějakého jiného už vajíčko nezbyde. Zaměřme se na nejbližší dva politiky, ti po sobě určitě navzájem hodí vajíčkem. Kdyby někdo hodil vajíčko po některém z nich, jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že se to nestalo, potom můžeme dvojici nejbližších politiků ignorovat a řešit úlohu dál, jako by tam ta dvojice nebyla. Opakováním stejné úvahy nám nakonec zbyde jen jeden politik, kterého nikdo netrefil.

3. Ať $|AB|$ je nejdelší vzdálenost mezi vrcholy mnohoúhelníku a C je jeho vrchol takový, že $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Kdyby ABC nebyl rovnostranný trojúhelník, musela by jeho strana AC nebo BC být delší než AB, spor.

4. Odpověď je 5. Pro menší n nalezneme snadno strategii pro Petra. Pro $n \geq 5$ obarví Zdeněk nejvýše čtyři body: nejlevější, nejpravější, nejhornější, nejspodnější.

5. Nechť AB je strana M nejblíže O. Pokud by projekce O na AB ležela na polopřímce opačné BA, bude druhá strana M, která obsahuje B, z konvexity M blíže k O než AB, což je spor.

6. Zvolme nějaké pořadí bodů a označme je A_1, A_2, …, A_n. Berme $A_1 = A_{n+1}$. Nechť se pro nějaké i a j, $i \notin \{j, j+1, j-1\}$, protínají úsečky A_iA_{i+1} a A_jA_{j+1}. Potom prohodíme A_j a A_{i+1}, čímž se tyto úsečky přestanou protínat. Protože se tím součet $|A_iA_{i+1}|$ pro $1 \leq i \leq n$ zmenší, musí dojít k tomu, že se žádná taková dvojice úseček protínat nebude. Pak je $A_1A_2 \ldots A_n$ hledaný n-úhelník.

7. Když $|S| = 4$, je situace triviální. Jinak vezmeme trojúhelník ABC s největším obsahem. Ze zadání existuje bod D takový, že $ABCD$ je v nějakém pořadí rovnoběžník. Obsahy ABC, BCD, CDA, DAB jsou všechny stejné. Pokud by některý bod S ležel vně $ABCD$, najdeme trojúhelník s větším obsahem. Pokud by některý bod S ležel uvnitř $ABCD$, bude podle podmínky ze zadání existovat i nějaký bod v S vně $ABCD$. Žádný další bod v S proto nemůže být.

8. Uvažme přímky a_1, a_2, b_1 a b_2, kde a_1 a a_2 mají jednu barvu a b_1 a b_2 mají druhou barvu. Navíc nechť a_1, a_2 a b_1 prochází jedním bodem, b_2 jím neprochází a zbylé tři přímky protíná v pořadí a_1, b_1, a_2. Nejdřív si rozmyslíme, že tam taková konfigurace vůbec je, potom uvážíme takovou, kde a_1, a_2 a b_2 vytínají trojúhelník s nejmenším obsahem. Díky průsečíku b_1 a b_2 dostaneme další takovou konfiguraci s menším obsahem, spor.

9. Pro spor nechť A, B, C jsou takové body, které neleží na jedné přímce a vzdálenost A od BC je nejmenší. Na BC musí ležet další bod D. Dva z bodů B, C, D musí ležet na stejné straně od kolmice z A na BC, bez újmy na obecnosti B a D. Pak je vzdálenost B od AD menší než vzdálenost A od BC, spor.

10. Pro každý bod uvažme jeho paritu jeho x-ové, y-ové a z-ové souřadnice. Máme 9 bodů, ale jenom 8 možností, jak můžou parity vyjít. Pro nějaké dva body tedy musí všechny parity vyjít stejně. Vzdálenost těchto bodů je potom ve všech souřadnicích sudá a střed jejich spojnice musí být celočíselný.

11. Každé dvojici bodů $A, B \in S$ potřebujeme přiřadit třetí bod C, který bude ležet na ose úsečky AB. Vyberme si tedy jeden bod $P \in S$ a zamysleme se, na osách kolika různých úseček může ležet. Co kdyby ležel na ose XY a zároveň na ose YZ pro nějaké $X, Y, Z \in S$? Potom by byl středem kružnice opsané trojúhelníku XYZ, což je zakázané, takže se to stát nemůže. To ovšem znamená, že bod P může ležet na osách pouze $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ různých úseček (jinak by nějaké dvě z nich sdílely koncový bod, což nesmí). Když to sečteme přes všechny body z S dostane $n \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ různých úseček. To je ale pro sudé n moc málo, protože n bodů tvoří celkem $n \cdot \frac{n-1}{2}$ dvojic.

12. Rozdělíme $2n$-úhelník podle jedné ze střel, nechť protíná stranu a. Počet vrcholů střelců a stran různých od a je v jedné polorovině od střely stejný. Protože $2n-1$ je liché číslo, tento počet musí být na jedné straně ostře větší než na druhé. Zároveň střelci z jedné poloroviny se musí trefit do strany v polorovině opačné, tedy z Dirichletova principu jsme hotovi.

13. Uvažme klasické obarvení šachovnice, každé domino potom zakryje jedno černé a jedno bílé políčko. Uvažme nějaký svislý řez a podívejme se, jaká domina rozpůlí (podobně jako v ukázkovém příkladu). Podle ukázkového příkladu jsme museli rozpůlit sudý počet domin. Může se stát, že počet rozpůlených domin s bílým políčkem nalevo je jiný než počet rozpůlených domin s bílým políčkem vpravo? Nemůže, protože potom by bychom na levé části šachovnice (a na pravé taky) měli různý počet zbývajících bílých a černých políček, tudíž by nemohly být pokryté dominy.

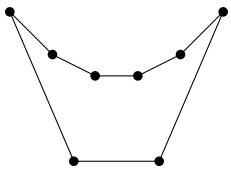
14. Ukážeme, že bude na konci hry zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Pro spor tedy předpokládejme, že je nenamalovaných úhlopříček lichý počet a už není možné táhnout.

V této situaci každou nenamalovanou úhlopříčku protíná lichý počet těch již namalovaných. Nechť XY je libovolná nenamalovaná úhlopříčka. XY dělí mnohoúhelník na dvě části, označíme-li počty vrcholů v jednotlivých částech jako a a b, platí $a+b=2n-1$. Součet $a+b$ je lichý, takže součin ab je sudý. Úhlopříčku XY tedy protíná sudý počet úhlopříček, z nichž je lichý počet namalovaných. Počet nenamalovaných úhlopříček protínajících XY proto musí být lichý. Každou nenamalovanou úsečku (kterých je lichý počet) tedy protíná lichý počet nenamalovaných úseček, to ale podle jednoho z příkladů v sekci o paritě není možné!

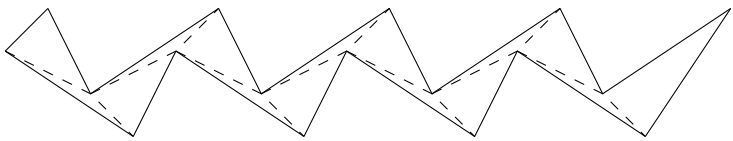
Dokázali jsme, že na konci hry bude zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Celkový počet úhlopříček v $(2n+1)$-úhelníku je $(2n+1)(n-1)$, takže je sudý právě tehdy, když je n liché. Pro sudé n tedy vyhraje Klátra a pro liché n Klárka.

15. Protože je $2n$ možných směrů úhlopříček a $2n$ možných úseček, stačí nám sporem ukázat, že nemůžeme využít všechny. Víme, že n z těchto směrů nás posune o lichý počet vrcholů, n o sudý počet vrcholů. Protože nakonec skončíme tam, kde jsme začali, dohromady se posuneme o nějaký násobek $2n$. Pokud 2^k je nejvyšší mocnina dvojky, která dělí n, celkově se posuneme o násobek 2^{k+1}. Za „sudé“ směry se také posuneme o násobek 2^{k+1}, avšak za „liché“ o lichý násobek 2^k, tedy v součtu jsme se nemohli posunout o násobek 2^{k+1}, spor.

16. Začneme se dvěma body a naproti nim uděláme nekonvexní oblouk tvořený dalšími n body. Pro $n=6$ by řešení mohlo vypadat třeba takto.



17.



18. Předpokládejme, že v jednom z trojúhelníků leží aspoň dva body. Tento trojúhelník můžeme doplnit na triangulaci, tím vytvoříme $n-3$ dalších trojúhelníků. Zbývá nám ovšem jenom $n-4$ bodů, spor.

19. Počet trojúhelníků, které mají postupně jednu, dvě a tři strany bez polevy označíme J, D a T. Potom počet stran, které trojúhelníky mají s polevou, je $n = 2J + D$. Počet stran bez polevy je $2(n-3) = J+2D+3T$. Odečtením dvojnásobku první rovnice od druhé a vydělením -3 dostaneme $J - T = 2$, přesně jak chceme.

20. Triangulaci splňující zadání označme jako *ostroúhlou*. Mějme nějakou ostroúhlou triangulaci. U vrcholů, z nichž nevede žádná diagonála, musí být ostrý úhel. Dokážeme, že takové vrcholy jsou nejvýše tři. Součet úhlů v n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180°$, takže pokud by byly čtyři, na zbylých $n-4$ úhlů by zbývalo více než $(n-4) \cdot 180$ stupňů. Mnohoúhelník má ale být konvexní, což je spor. Nyní použijeme indukci. Nechť tvrzení platí pro všechny n-úhelníky a dokážeme ho pro $(n+1)$-úhelníky. Vezměme libovolný $(n+1)$-úhelník a pro spor nechť má dvě různé ostroúhlé triangulace. Každá z nich má alespoň dva vrcholy, z nichž nevede diagonála. Protože možné takové vrcholy jsou nejvýše tři, musí mít tyto dvě triangulace jeden z nich společný. Ten můžeme odstranit a dostaneme n-úhelník, který musí mít jednoznačnou triangulaci, spor.

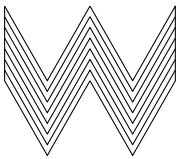
21. Dokážeme, že $3 \mid n$. Protože počet diagonál je $n-3$, stačí dokázat, že je dělitelný třemi. Budeme diagonály po třech odebírat. Nechť už jsou nějaké odebrané. Vyrazíme z jednoho vrcholu, vezmeme první diagonálu po směru hodinových ručiček, která z něj vychází. Přejdeme po ní, vezmeme první další diagonálu proti směru hodinových ručiček, která vychází z tohoto vrcholu. Toto opakujeme, dokud neskončíme ve vrcholu, kde už jsme byli. Protože jsme brali vždy první diagonálu proti směru hodinových ručiček (kromě první), museli jsme dokonce skončit v původním vrcholu a obešli jsme mnohoúhelník, v němž nejsou žádné neodebrané diagonály. Protože vždy začínáme s první diagonálou po směru hodinových ručiček, nemohli jsme z něj dřív nějaké diagonály odebrat, tedy je to trojúhelník. Odebereme tedy tři diagonály, které jsme prošli, a pokračujeme. Na konci nám nemohou zbýt žádné diagonály díky tomu, že počet diagonál vycházejících z libovolného vrcholu je vždy sudý.

Konstrukci uděláme indukcí.

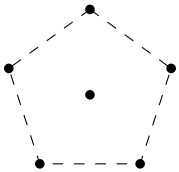
22. Vybereme si nějakou triangulaci n-úhelníku a obarvíme jeho vrcholy třemi barvami tak, aby každý trojúhelník měl vrcholy různých barev. Pak umístíme hlídače do vrcholů té barvy, kterou jsme použili nejméněkrát. Hlídačů jsme umístili nejvýše $\frac{n}{3}$ a každý trojúhelník zvolené triangulace má hlídače v právě jednom vrcholu. Každý bod je v nějakém trojúhelníku triangulace, tedy na něj některý hlídač vidí.

23. Pro stranu A_1A_2 n-úhelníku K označíme X ten vrchol K, pro nějž je úhel A_1XA_2 nejmenší. Pak A_1XA_2 je pokrývací trojúhelník. Označme K_1 průnik K s polorovinou danou přímkou A_1X, v níž není A_2, K_2 symetricky. Protože vrcholy K_1 jsou uvnitř kružnice opsané A_1XA_2, každý pokrývací trojúhelník K_1 je i pokrývací trojúhelník K, obdobně pro K_2. Postup tedy opakujeme, dokud nemáme triangulaci z pokrývacích trojúhelníků. Kdyby existoval jiný pokrývací trojúhelník, musela by jedna jeho strana, označme ji XY, protínat nějakou diagonálu naší triangulace, označme ji ST. Protože X a Y jsou uvnitř kružnice nad ST, platí $|\sphericalangle SXT| + |\sphericalangle SYT| > 180°$, obdobně $|\sphericalangle XSY| + |\sphericalangle XTY| > 180°$. Takže další pokrývací trojúhelník tam být nemůže, protože pak bychom měli čtyřúhelník se součtem úhlů větším než $360°$.

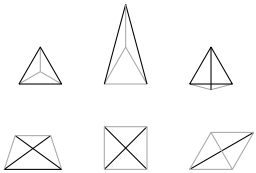
24.



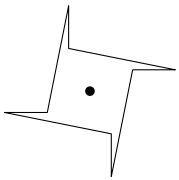
25.



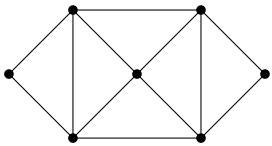
26.



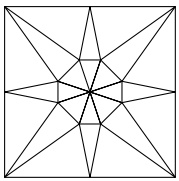
27.



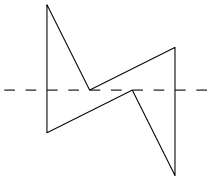
28.



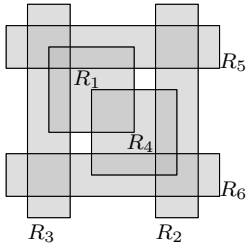
29.



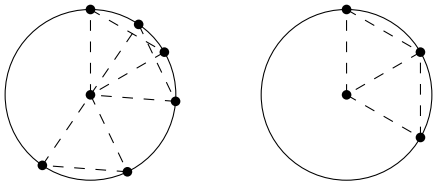
30.



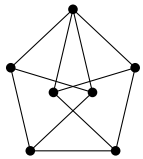
31.



32. Pro liché n stačí vzít několik rovnostranných trojúhelníků sdílejících vrchol jako na obrázku vlevo. Pro sudé n dva z těchto trojúhelníků slepíme stranou jako na obrázku vpravo.



33.



34. Budeme nafukovat kružnici se středem A. Začneme se samotným A a nikdy nepřestaneme protínat mnohoúhelník, který kružnicí protínáme. Pokud skončíme dřív, než protneme všechny, musí být některý mnohoúhelník uvnitř kružnice a jiný ostře vně, což je spor s tím, že se každé dva mnohoúhelníky protínají.

35. Vezmeme libovolný bod S, okolo kterého budeme přímku otáčet. Začneme tím, že k němu zvolíme jakýkoli další bod A a těmito dvěma body povedeme přímku. Rozdíl počtu bodů na jedné a na druhé straně označíme r. Otáčením přímky se r zvětší nebo zmenší o 1, podle toho, na kterou stranu se dostane A. Až narazíme na další bod, opět se o změní o 1 podle toho, kde tento bod byl. Takto otočíme přímku o $180°$. Potom r je opačné k tomu, jaké bylo na začátku, tedy někdy muselo být 0. Když bylo 0, byla otáčející se přímka přesně ta, kterou hledáme.

36. Začneme s kružnicí, na níž leží jeden z našich bodů, ale uvnitř ní žádný není. Začneme posouvat její střed v nějakém směru, přičemž na ní stále bude první bod, dokud nenarazíme na další bod. Potom posouváme její střed po ose těchto dvou bodů, dokud nenarazíme na třetí, čímž jsme našli požadovanou kružnici.

37. Určitě umíme najít jeden směr, který není kolmý na žádnou přímku. Pepa začne přede všemi průsečíky, bude postupovat v tomto směru a číslovat průsečíky v pořadí, ve kterém je potká. Představit si to můžeme jako zametání jednou přímkou, která není rovnoběžná s žádnou zadanou.

38. Vezměme dvě přímky tvořící kříž, rovnoběžné s osami, aby všechny obdélníky byly dole a napravo od nich. Potom s přímkami budeme posouvat dolů a doprava tak, aby nikdy nepřestaly protínat obdélník, který už protínají. Co by to znamenalo, kdybychom nemohli pohnout ani jednou z přímek a stále bychom neprotínali všechny obdélníky? Potom by musel být nějaký obdélník ostře vpravo dole od našich přímek, zároveň by každá z těchto přímek musela ležet na hranici nějakého obdélníku, který je pouze nahoru nebo nalevo od nich. Tyto obdélníky by tedy porušili zadání a nemůže se nám to stát.

39. Vezmeme libovolné dva body $A, B \in S$. Jednu polorovinu určenou AB označíme ρ, druhou σ. Budeme zametat kruhem, který má na obvodu A a B a na začátku bude obsahovat všechny body S z ρ, na konci všechny ze σ. Body z ρ budou z kruhu postupně mizet, body ze σ se naopak budou přidávat. Kdyby nejprve všechny z ρ zmizely a pak se všechny ze σ přidaly, má A a B na hranici jen jeden dobrý kruh, protože jen v jedné polorovině je alespoň $n-1$ bodů. Proházíme body, aby se tohle stalo a nezměnila se parita. Když vezmeme $X \in \rho$ a $Y \in \sigma$ takové, že X zmizí těsně po přidání Y, posuneme X o kousek na X' tak, aby X zmizelo před přidáním Y, ale pořadí jiných bodů se nezměnilo. Kruhy ABY a ABX obsahují stejně bodů z S, stejně tak ABY a ABX'. Tedy jsme buď o dva dobré kruhy přišli, nebo se dva přidaly, nebo se jejich počet nezměnil, každopádně parita zůstává stejná.

40. Rozdělme si trojúhelník na tři menší s vrcholem v jediném vnitřním mřížovém bodě. Všechny tyto trojúhelníky nemají uvnitř ani na stranách žádné mřížové body, takže z Pickovy formule mají všechny stejný obsah, a to $\frac{1}{2}$. To už ale nutně znamená, že se jedná o těžiště. Těžiště je totiž jediný bod, který dělí trojúhelník na tři části se stejným obsahem.

41. Použijeme podobnou myšlenku jako u slepování mnohoúhelníků. Budeme postupovat indukcí podle počtu děr. Mějme mnohoúhelník P s h dírami, i vnitřními body a b body na hranici. Ať nová díra Q má i' vnitřních bodů a b' bodů na hranici. Obsahy P a Q postupně označíme S a S'. Potom je obsah P bez Q roven

$$\begin{aligned} S - S' &= \left(i + \frac{b}{2} + h - 1\right) - \left(i' + \frac{b'}{2} - 1\right) \\ &= \left(i - i' - b'\right) + \frac{b + b'}{2} + (h+1) - 1, \end{aligned}$$

jak jsme chtěli dokázat.

42. Stačí nám spočítat počet způsobů, jak z mincí o hodnotě 2 a 3 poskládat částku nejvýše 2022, zbytek můžeme vždy jednoznačně doplnit mincemi o hodnotě 1. Tyto možnosti můžeme reprezentovat jako počet mřížových bodů v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a mají délky $\frac{2022}{2} = 1011$ a $\frac{2022}{3} = 674$. Mřížový bod se souřadnicemi (x, y) reprezentuje případ, kdy použijeme x mincí hodnoty 2 a y mincí hodnoty 3. Tento trojúhelník má obsah $\frac{1}{2} \cdot 1011 \cdot 674 = 340707$. Na jeho odvěsnách je 1012 a 675 mřížových bodů. Největší společný dělitel 1011 a 674 je 337, na přeponě je tedy 338 mřížových bodů. Trojúhelník má tedy na obvodu $1012 + 657 + 338 - 3 = 2022$ mřížových bodů. Z Pickovy formule dostáváme, že jich uvnitř má $340707 - \frac{2022}{2} + 1 = 339697$. Celkový počet mřížových bodů (způsobů zaplacení) tedy je $339697 + 2022 = 341719$.

43. Když naše body budou mít celočíselné souřadnice, budou obsahy všech trojúhelníků s vrcholy v nich podle Pickovy formule racionální. Stačí nám tedy najít n mřížových bodů v obecné poloze takových, že vzdálenost každých dvou je iracionální. První z nich umístíme na pozici $(0, 0)$. Nyní předpokládejme, že už máme umístěných prvních k bodů na souřadnicích $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$. Zvolíme $x_{k+1} = \max\{x_1, \ldots, x_k\} + 1$ a dále zvolíme y_{k+1} tak, aby pro každé $i \leq k$ splňovalo $(y_{k+1} - y_i + 1)^2 - (y_{k+1} - y_i)^2 > (x_{k+1} - x_i)^2$. Potom by byla druhá mocnina vzdálenosti nově přidaného a i-tého bodu z Pythagorovy věty více než $(y_{k+1} - y_i)^2$, ale méně než $(y_{k+1} - y_i + 1)^2$. Tudíž vzdálenost těchto dvou bodů by byla iracionální. Stačí ovšem zvolit hodně velké y_{k+1}, protože rozdíl dvou po sobě jdoucích čtverců s rostoucím y_{k+1} roste. Volbou dostatečně velkého y_{k+1} také zařídíme, že žádné tři body nebudou na přímce.

44. Označme zadaný bod a mnohoúhelník x a M. Ve středové souměrnosti podle x se mřížové body zobrazí na mřížové body. Sjednocení M a jeho obrazu tvoří mnohoúhelník, možná s dírami, protože mají společný alespoň bod x. Pokud by se mřížový bod M zobrazil do M, měli bychom hotovo, pro spor nechť to tak není. Potom se body z hranice a vnitřku zobrazí postupně na hranici a dovnitř. Tudíž z Pickovy formule vyjde, že obsah sjednocení M a jeho obrazu je více než dvakrát obsah M (spočítaný z Pickovy formule), což je spor.

Kombinatorická geometrie II – Síla konvexity

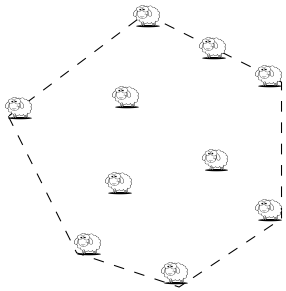
Milý příteli,
dostává se Ti do rukou již druhý díl seriálu o kombinatorické geometrii. V minulém díle sis mohl(a) všimnout, že konvexní mnohoúhelníky se chovají daleko příjemněji a předvídatelněji než mnohoúhelníky nekonvexní. Například v první soutěžní úloze první série by se odpověď změnila, kdybychom se omezili jen na konvexní mnohoúhelníky. U konvexních mnohoúhelníků jsme zase v závislosti na počtu vrcholů uměli určit, kolik mají triangulací, zatímco u nekonvexních počet triangulací závisí na tvaru. Konvexní mnohoúhelník se svým vnitřkem je speciálním případem konvexní množiny. Tu si v tomto díle definujeme a podíváme se, jaké hezké věty pro ni platí. Na rozdíl od předchozího dílu budeme pracovat nejen v rovině, ale i v prostoru a obecně ve vyšších rozměrech. Vytvoříme si několik nástrojů pro práci s body ve více rozměrech. Než se do toho ale pustíme, budeme se ještě chvíli držet při zemi (v rovině).

Přejeme Ti příjemné čtení a hodně štěstí při řešení soutěžních úloh. Připomínáme, že jsou seřazené podle obtížnosti, nikoli podle témat v seriálu.

Pepa a Majda

Konvexní obal

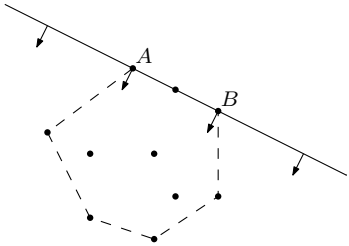
V této kapitole si ukážeme další způsob, jak si udělat pořádek v konečné množině bodů v rovině. Představ si, že na louce stojí ovečky a my bychom kolem nich rádi postavili ohrádku. Taková správná ohrádka je konvexní mnohoúhelník. Zároveň by se ale sousedi zlobili, kdybychom ohrádkou zabrali moc velký kus louky. Tudíž postavíme ohrádku co nejmenší. Jak bude vypadat ta část louky, kterou si ohrádkou zabereme? Nazvěme ji *konvexní obal* našich oveček.



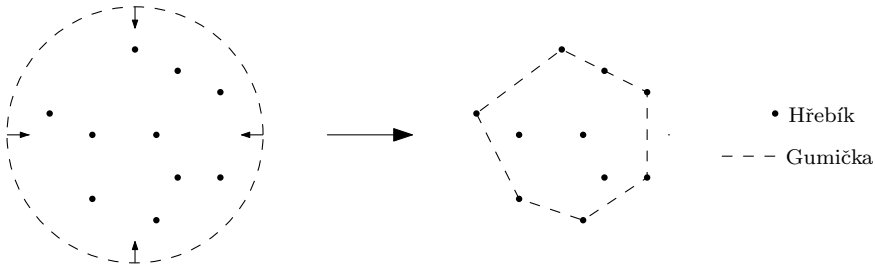
Za konvexní obal bodů (oveček) považujeme mnohoúhelník i s jeho vnitřkem. To proto, aby tato definice souhlasila s definicí pro obecné množiny, kterou si později ukážeme. Terminologie s konvexním obalem spojená ale spíš připomíná terminologii mnohoúhelníků. Když bod leží na obvodu konvexního obalu, říkáme, že leží *na* konvexním obalu. O ostatních bodech konvexního obalu říkáme, že leží *uvnitř* něj.

Dále je dobré si uvědomit, že pro konečnou množinu bodů X v rovině má konvexní obal vrcholy v bodech X. Intuitivně, kdyby tomu tak nebylo, šel by roh alespoň o kousek „uříznout“. Když jsou body z X v obecné poloze, tedy žádné tři neleží na přímce, dokonce žádné další body z X na konvexním obalu nejsou.

Můžeme si povšimnout, že pro dva sousední body A a B na konvexním obalu jsou všechny ostatní body z X v jedné polorovině od přímky AB.



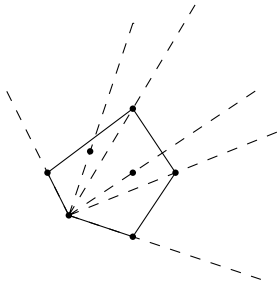
Jiný způsob, jak se na konvexní obal dívat, je následující. Představíme si, že body v rovině jsou hřebíky a my okolo nich natáhneme gumičku. Gumička se stáhne a bude tvořit hranici konvexního obalu.



Cvičení 1. V rovině leží $n \geq 3$ bodů, kolik nejméně a nejvíce z nich může ležet na konvexním obalu?

Příklad. V rovině leží 200 bodů v obecné poloze. Dokaž, že nějaké tři z nich tvoří úhel o velikosti méně než 1°.

Řešení. Uvážíme konvexní obal těchto bodů, to bude konvexní mnohoúhelník. Zvolme si libovolný vrchol na konvexním obalu, u něj je určitě úhel menší než 180°. Uvnitř tohoto úhlu leží zbývajících 197 bodů. Úhel tedy můžeme rozdělit na 199 disjunktních částí, které dohromady dají méně než 180°. Aspoň jedna z těchto částí proto musí mít velikost menší než 1°.



Všimni si, že jsme předchozí příklad mohli vyřešit i za pomoci extremálního principu – mohli jsme uvážit třeba bod nejvíce dole. To je docela běžné, neznamená to ale, že by konvexní obal nebyl užitečný. Formulace pomocí konvexního obalu může být výrazně jednodušší (obzvlášť když potřebujeme něco složitějšího než jenom jeden extremální bod) a také se o ní někdy snadněji přemýšlí.

Úloha 1. V rovině leží n bodů v obecné poloze. Dokaž, že z nich můžeme vybrat tři body tak, aby všechny ostatní body ležely uvnitř nebo na hranici kružnice opsané těmto bodům.

V úlohách budeme docela často postupovat indukcí. K čemu tedy potřebujeme konvexní obal, když úlohu stejně vyřešíme indukcí? Indukovat obvykle budeme podle počtu bodů, a to tak, že odebereme nějaký bod (nebo i více bodů) na konvexním obalu.

Příklad. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazýváme *kolumbijským*, jestliže je z nich 2013 červených, 2014 modrých a žádné tři neleží v přímce. O skupině přímek v rovině řekneme, že je *dobrá* pro dané rozmístění, jestliže

- žádná z přímek neprochází žádným bodem rozmístění,
- žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev.

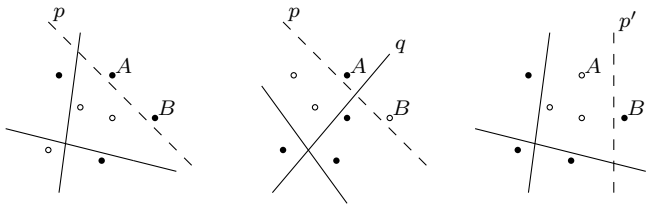
Najdi nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění 4027 bodů v rovině v ní existuje skupina k dobrých přímek. (IMO 2013)

Řešení. Odpovědí je 2013. Dokážeme jenom dolní odhad, tedy že nám 2013 přímek opravdu vždy stačí. Konstrukci, kdy jich 2013 opravdu potřebujeme, ponecháme jako cvičení. Budeme postupovat indukcí, dokonce dokážeme něco ještě trochu silnějšího.

Lemma. *Když je červených a modrých bodů dohromady n, stačí nám na jejich rozdělení $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ přímek.*

Lemma dokážeme indukcí, pro $n \leq 2$ je tvrzení triviální. Nyní předpokládejme, že platí pro $n-2$ a dokažme jej pro n. Uvažme konvexní obal barevných bodů a vyberme na něm dva sousedící body, označme je A a B. Tyto dva body můžeme od všech ostatních oddělit nějakou přímkou, nazvěme ji p. Zbylých $n-2$ bodů umíme z indukčního předpokladu rozdělit $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ přímkami, množinu těchto přímek označme Q. Rozlišíme tři případy:

(1) A a B mají stejnou barvu. Potom vyhovuje množina $Q \cup \{p\}$.
(2) A a B mají různé barvy a odděluje je od sebe nějaká přímka $q \in Q$. Potom opět vyhovuje množina $Q \cup \{p\}$.
(3) A a B mají různé barvy a neodděluje je od sebe žádná přímka z Q. Po nakreslení všech přímek z Q musí A a B ležet v oblasti, ve které mají všechny body až na jeden (A nebo B) stejnou barvu. Teď nám stačí uvážit přímku p', která odděluje A nebo B od všech ostatních. Taková přímka jistě existuje, protože A i B jsou na konvexním obalu. Hledaná množina přímek je $Q \cup \{p'\}$.



Mohlo by se nám stát, že nějaká přímka z Q prochází A nebo B. Z indukčního předpokladu ale neprochází zbylými $n-2$ body, kterých je konečný počet. Takže ji můžeme o kousek posunout, aby neprocházela ani A, ani B a zároveň všechny ostatní body byly ve stejné polorovině od ní jako předtím.

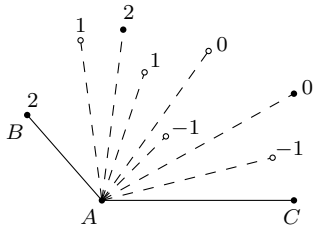
Cvičení 2. Rozmysli si, že v předchozí úloze někdy opravdu potřebujeme 2013 přímek.

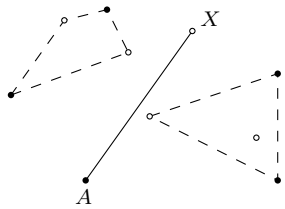
Ukážeme si alternativní řešení příkladu, který už jsme viděli v minulém dílu v kapitole o extremálním principu.

Příklad. V rovině leží n černých a n bílých bodů v obecné poloze. Dokaž, že je možné popárovat černé body s bílými tak, že se úsečky spojující páry nebudou protínat.

Řešení. Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ zjevně platí. Nyní předpokládejme, že úloha platí pro každé k od 1 do n a dokážeme ji pro $n + 1$. Vezmeme konvexní obal všech bodů, černých i bílých dohromady. Zvolme si libovolný vrchol na něm, označme jej A, nechť je BÚNO černý. Sousedy zvoleného bodu označme B a C. Kdyby byl jeden z nich bílý, mohli bychom ho spojit s A a tvrzení by platilo z indukčního předpokladu. Dále tedy předpokládejme, že jsou oba jeho sousedi také černí.

Všechny body kromě A si setřiďme podle směrnice polopřímky z A do nich. Použijeme diskrétní spojitost. K B napišme číslo 2. Nyní postupujme podle úhlu, když narazíme na bílý bod, snížíme hodnotu o 1, když na černý, zvýšíme ji o 1. Takto pokračujeme až k bodu těsně před C. U něj určitě budeme mít číslo -1, protože celkem je černých a bílých bodů stejně. Začali jsme na 2, skončili na -1, takže jsme určitě někdy museli být na 0. Dokonce jsme někdy museli být na 0, když jsme zrovna zpracovávali bílý bod. To protože jsme se na 0 někdy museli dostat z 1 tím, že jsme klesli o 1, což se muselo stát v bílém bodě, označme jej X. Teď nám stačí spojit A s X. Na obou stranách přímky AX je stejně bílých a černých bodů, takže je z indukčního předpokladu lze popárovat. Tím bylo tvrzení dokázáno.





Úloha 2. *Závodní trať* je lomená čára v rovině složená z konečně mnoha orientovaných úseček, z nichž žádné dvě se neprotínají ve svých vnitřních bodech. *Zatáčka* je bod, který je koncovým bodem jedné z těchto úseček a počátečním bodem té následující. Zatáčka B mezi orientovanými úsečkami $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ je *pravotočivá*, pokud má řidič formule jedoucí z A do B bod C po pravé ruce. Analogicky definujeme *levotočivou* zatáčku.

V rovině je dáno n bodů v obecné poloze. Kuba by chtěl postavit závodní trať složenou z $n - 1$ orientovaných úseček, jejichž krajními body je právě těchto n bodů. Lenka mu zadala posloupnost délky $n - 2$ složenou ze znaků R, L, kde R značí pravotočivou a L levotočivou zatáčku. Dokaž, že Kuba dovede body propojit závodní tratí tak, aby pravotočivost či levotočivost jejích zatáček přesně odpovídala posloupnosti, kterou Lenka zadala. (iKS, 9. ročník, C5)

Úloha 3. Mějme $n \geq 3$ bodů v rovině, přičemž žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Uvažujme vnitřní úhly všech trojúhelníků s vrcholy v daných bodech a velikost nejmenšího takového úhlu označme φ. Pro dané n najdi největší možné φ. (MO 64 A–II–4)

Úloha 4. V rovině jsou dány úsečky, z nichž se žádné dvě neprotínají (ani v krajních bodech). Řekneme, že úsečka AB *rozbíjí* úsečku CD, pokud prodloužení úsečky AB na polopřímku protíná CD ve vnitřním bodě. Je možné, aby každá zadaná úsečka rozbíjela při prodloužení na obě strany nějakou jinou zadanou úsečku? (IGO 2018)

Úloha 5. Nechť S je konečná množina bodů v rovině. Pro každé tři různé body $A, B, C \in S$, které nejsou na jedné přímce, leží v S i střed kružnice opsané ABC. Dokaž, že všechny body S leží na jedné přímce.

Úloha 6. V rovině je dáno $2n$ bodů v obecné poloze, $n > 1$. Z nich je n obarveno modře a n červeně. Přímka se nazývá *vyrovnaná*, pokud prochází jedním modrým a jedním červeným bodem a počet modrých bodů na jedné straně od ní je stejný jako počet červených bodů na této straně. Dokaž, že existují alespoň dvě vyrovnané přímky. (USAMO 2005)

Úloha 7. Najdi všechny konečné množiny S alespoň tří bodů v rovině takové, že pro každé dva různé body A a B z S je osa úsečky AB osou symetrie S. (IMO 1999)

Trocha formalit

Dosud jsme pracovali téměř výhradně v rovině. Nyní už se ale vzneseme i do vyšších dimenzí. Tam už si bude ale těžké věci představovat. Intuici budeme pořád opírat o to, co si umíme představit, tedy o dvou nebo třídimenzionální prostor. Abychom ale pořádně dokázali něco i ve vyšších dimenzích, potřebujeme si zavést způsob, jak s body pracovat. Jak třeba poznáme, že nějaké body leží na přímce nebo že bod leží uvnitř daného útvaru? Než si na tyto otázky odpovíme, musíme udělat ještě trochu práce.

Ve zbytku tohoto dílu seriálu budeme sčítat hodně čísel, někdy něčím vynásobených. Zavedeme si proto trochu značení. Součet čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ budeme značit $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Toto značení můžeme použít i se složitějšími výrazy závisejícími na i než a_i, třeba s různými součiny, podíly atd. Také se nám může hodit brát i ne od 1 do n, ale z nějaké množiny M. To budeme značit $\sum_{i \in M} a_i$. Kdyby se nám stalo, že M je prázdná množina, definujeme tento součet jako 0.

Narážíme na otázku, jak pracovat s body v mnoha dimenzích. Odpověď je jednoduchá, zavedeme si souřadnicový systém a místo bodů budeme pracovat s takzvanými *vektory*. Vektor a bod pro nás vlastně budou reprezentovat úplně ten stejný objekt, v kontextu našeho seriálu tedy můžeme tyto pojmy skoro libovolně zaměňovat.

Definice. *Vektorem* $v \in \mathbb{R}^d$ rozumíme uspořádanou d-tici čísel

$$(v_1, v_2, \ldots, v_d).$$

Na vektorech není nic složitého a můžeme s nimi pracovat velmi jednoduše. Můžeme je spolu sčítat (a odčítat) nebo je násobit (a dělit) reálným číslem. Vektory mezi sebou ovšem nemůžeme násobit[1].

Definice. Pro vektory $u, v \in \mathbb{R}^d$ definujeme jejich *součet*

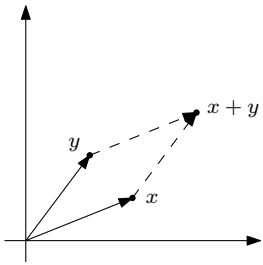
$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_d + v_d)\,.$$

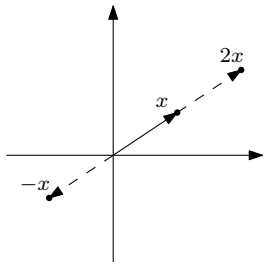
Definice. Pro vektor $v \in \mathbb{R}^d$ a reálné číslo $c \in \mathbb{R}$ definujeme jejich *součin*

$$cv = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_d)\,.$$

Vektor odpovídající bodu x můžeme interpretovat jako šipku, která ukazuje z počátku do x. Je to vlastně posunutí, které zobrazí počátek na x. Sčítání dvou vektorů potom odpovídá složení těchto dvou posunutí – nakreslení šipek za sebe. Násobení reálným číslem je potom prodlužování a zkracování této šipky (násobení záporným číslem odpovídá šipce ukazující opačným směrem).

[1] Dobře, tohle není úplně pravda – možná už jsi někdy potkal(a) skalární nebo vektorový součin. My se jimi ale zabývat nebudeme.





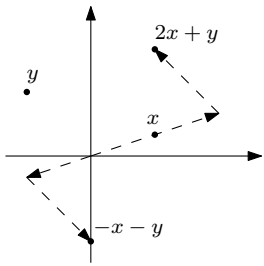
Kombinace

Teď si ještě definujeme tři velmi podobné pojmy. Ze začátku to možná bude trochu matoucí, ale ničeho se nelekej, všechny mají jednoduchou geometrickou interpretaci a brzo by mělo být jasné, proč potřebujeme všechny.

Definice. Nechť $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^d$ jsou body a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ jsou reálná čísla, potom bod

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

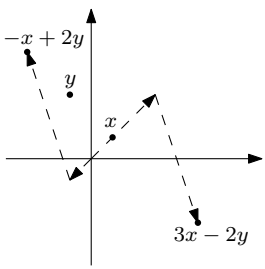
nazveme *lineární kombinací* bodů $x_1, \ldots, x_k$.



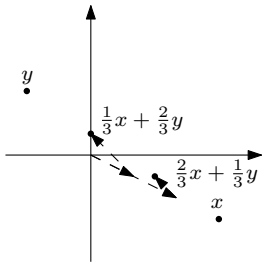
Definice. Jestliže v lineární kombinaci navíc platí

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

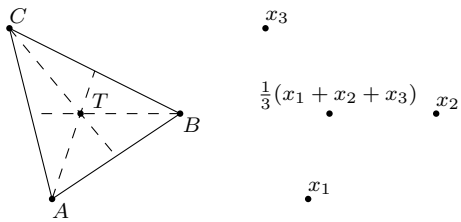
budeme jí říkat *afinní* kombinace.



Definice. Jestliže v afinní kombinaci navíc platí $\lambda_i \geq 0$ pro všechna λ_i, budeme jí říkat *konvexní* kombinace.



Máme tedy tři různé možnosti, jak kombinovat body, přičemž se liší množstvím požadavků, které na tuto kombinaci klademe. Dobrý způsob, jak se dívat na afinní a konvexní kombinace, je vážení bodů. U afinních kombinací to může být trochu matoucí, protože váhy mohou být i záporné. V případě konvexních kombinací je tato interpretace ale docela přirozená – nejspíš ses s ní už setkal(a), třeba těžiště trojúhelníka je jenom průměr jeho vrcholů.



Obaly

Důležitý pojem, který s kombinacemi bodů souvisí, jsou obaly.

Definice. Lineárním/afinním/konvexním *obalem* množiny X rozumíme množinu všech konečných[2] lineárních/afinních/konvexních kombinací těchto bodů.

Konvexní obaly jsme už potkali v první polovině tohoto dílu, zatím ale není moc jasné, že tato nová definice odpovídá naší dřívější intuici.

Pojďme se podívat na příklady obalů ve dvou dimenzích. Začněme jednoduše, jenom s jednoprvkovou množinou $X = \{x_1\}$. U afinního a konvexního obalu nemáme co vymýšlet, musíme zvolit $\lambda_1 = 1$, takže afinní i konvexní obal množiny X je zase X. S lineárním obalem je to trochu složitější, tam může být λ_1 libovolné. Když se na bod x_1 podíváme jako na šipku z počátku, můžeme dostat libovolný násobek této šipky. To je přece přímka procházející počátkem a x_1. Nojo, ale co kdyby bod x_1 ležel v počátku? Potom bude lineární obal jenom počátek, tedy zase X.

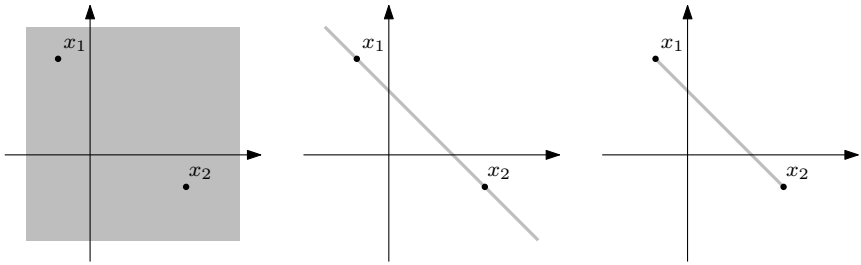
Co když bude X dvouprvková? Nechť tedy $X = \{x_1, x_2\}$. Nejprve se podíváme na afinní obal X. Víme, že pro afinní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ platí $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, můžeme ji tedy upravit následujícím způsobem:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 - (1 - \lambda_1)x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1).$$

Rozdíl $x_2 - x_1$ můžeme interpretovat jako vektor, tedy jako posunutí zobrazující x_1 na x_2. Libovolný násobek tohoto vektoru přičítáme k x_1, tedy dostáváme přímku. Konvexní obal je omezen tím, že $\lambda_2 \geq 0$, čímž vyřadíme body mimo polopřímku x_1x_2, a $\lambda_1 \geq 0$, čímž zase vyřadíme body mimo

[2] Tímto jenom chceme zdůraznit, že sčítáme jenom konečný počet bodů.

polopřímku x_2x_1. Zbyde nám proto jen úsečka x_1x_2 včetně krajních bodů. S lineárním obalem je to už zase složitější. Když přímka spojující x_1 a x_2 prochází počátkem, tedy bodem $(0, \ldots, 0)$, dostaneme jenom tuto přímku, v opačném případě bude lineárním obalem celá rovina.



Lineární obal Afinní obal Konvexní obal

Na lineárním obalu je nepříjemné, že závisí na tom, kde je počátek. Potíž je v tom, že obvykle máme nějakou množinu bodů bez počátku a chtěli bychom, aby bylo jedno, kde si ho zvolíme. Z pohledu kombinatorické geometrie tedy budou užitečnější afinní a konvexní kombinace. Ty totiž na volbě počátku nezávisí, jak naznačují následující cvičení.

Cvičení 3. Rozmysli si, že lineární obal množiny X je stejný jako afinní obal $X \cup \{O\}$, kde O značí počátek soustavy souřadnic.

Cvičení 4. Rozmysli si, že pokud počátek leží v X, pak afinní a lineární obal X splynou.

Už při zkoumání dvouprvkové množiny se trochu ukázalo, že podmínka $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ nám umožňuje přičíst a po kouskách odečíst libovolný bod x:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x).$$

Když za x zvolíme jeden z bodů x_i, vynuluje se nám vektor $x_i - x$. Stejně jako v předcházejících cvičeních se tedy zbavíme podmínky pro afinní kombinaci a zbyde nám místo afinní jen „lineární kombinace, pokud je počátek v x“. Podmínka přidaná navíc v konvexní kombinaci kontroluje, abychom „nevylezli moc daleko“.

Závislosti

Poslední pojem, který potřebujeme, je závislost bodů.

Definice. Množinu bodů X nazveme lineárně/afinně/konvexně *závislou*, jestliže existuje nějaký bod z X, který leží v lineárním/afinním/konvexním obalu zbylých bodů. V opačném případě ji nazveme lineárně/afinně/konvexně *nezávislou*.

Pokud jsi už někdy potkal(a) jinou definici lineární závislosti, můžeš si jako cvičení rozmyslet, že je ekvivalentní :-).

Cvičení 5. Dokaž, že jestliže je množina bodů konvexně závislá, je i afinně závislá.

Cvičení 6. Dokaž, že jestliže je množina bodů afinně závislá, je i lineárně závislá.

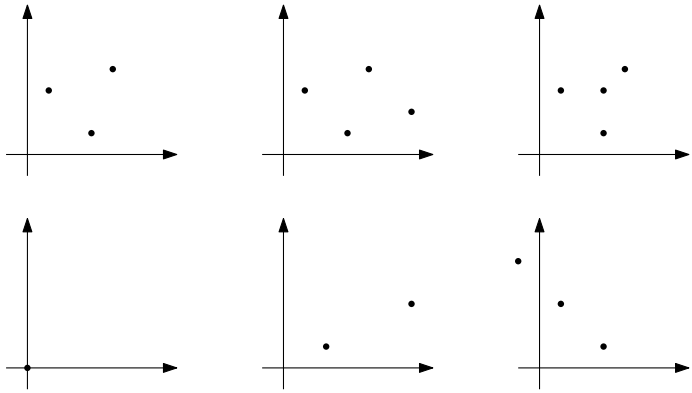
Zmiňme si jedno tvrzení z lineární algebry, které tady nebudeme formálně dokazovat. Ne, že by to bylo těžké, ale moc se to do seriálu nehodí.

Tvrzení. *Libovolných $d+1$ vektorů z $\mathbb{R}^d$ je lineárně závislých.*

Ze Cvičení 3 potom plyne, že libovolných $d+2$ vektorů z $\mathbb{R}^d$ je afinně závislých.

Cvičení 7. Platí něco podobného i pro konvexní závislost?

Cvičení 8. Které z následujících množin bodů v rovině jsou lineárně/afinně/konvexně závislé?

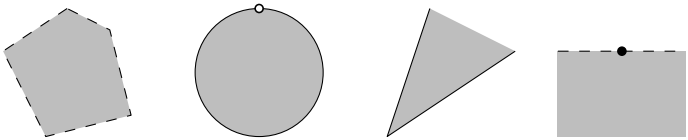


Konvexní množiny

V minulém díle jsme pracovali s konvexními mnohoúhelníky a před chvíli jsi viděl(a) konvexní obaly. Definice konvexní množiny všechny tyto případy zastřešuje. Je to vlastně jen formální způsob, jak říct, že nějaká množina v sobě nemá „díry“ nebo „vykousnutí“.

Definice. Nechť X je podmnožina $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že X je *konvexní*, pokud pro každé dva body x a y z X leží i celá úsečka xy v X.

Pozor na to, že konvexní množiny můžou vypadat divočeji, než bys možná na první pohled čekal(a). V jedné dimenzi je to ještě jednoduché, tam jsou konvexní právě intervaly, mohou být otevřené, uzavřené, nebo polouzavřené. To konkrétně zahrnuje i prázdný interval, jednobodové intervaly a celou přímku. Ve dvou dimenzích, tedy v rovině, už je situace složitější. Teď už nemůžeme všechny konvexní množiny vyjmenovat jako v jednodimenzionálním případě. Uveďme si aspoň několik příkladů, které by Tě nemusely napadnout: mnohoúhelník bez okraje, úhel menší než 180° (proto se mu říká konvexní), kruh bez bodu na hranici, polorovina bez okraje s bodem navíc.



Cvičení 9. Existuje konvexní množina bodů taková, že když z ní odebereme libovolný bod, přestane být konvexní?

Cvičení 10. Dokaž, že průnik libovolného počtu konvexních množin je konvexní.

Cvičení 11. Rozhodni, zda existuje konvexní množina v $\mathbb{R}^d$ taková, že i její doplněk je konvexní.

Nyní si definujeme konvexní obal trochu jinak než v předchozí kapitole a vzápětí si ukážeme, že tyto definice jsou opravdu ekvivalentní.

Definice. Pro množinu X bodů z $\mathbb{R}^d$ označme $\mathrm{conv}(X)$ průnik všech konvexních množin, které X obsahují.

Ze Cvičení 10 plyne, že $\operatorname{conv}(X)$ je konvexní množina.

Tvrzení. *Bod x leží v konvexním obalu množiny bodů X právě tehdy, když leží v $\operatorname{conv}(X)$.*

Důkaz. Rovnost dvou množin se obvykle dobře dokazuje tak, že postupně dokážeme dvě inkluze. Když je první množina podmnožinou druhé a druhá je podmnožina první, musí se množiny rovnat.

Indukcí ukážeme, že všechny konvexní kombinace bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ leží v $\operatorname{conv}(X)$. Pro $n = 2$ to plyne z definice konvexní množiny. Nyní zafixujme konvexní kombinaci n bodů z X a ukážeme, že leží v $\operatorname{conv}(X)$. Nechť tedy $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ a $\lambda_i \geq 0$. Označme $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \geq 0$. Pokud $S = 0$, je tvrzení triviální. Jinak platí

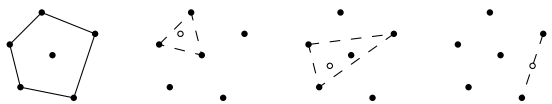
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_n x_n + S \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{S} \cdot x_i.$$

Platí $\frac{\lambda_1}{S} + \frac{\lambda_2}{S} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{S} = \frac{S}{S} = 1$, zároveň $\frac{\lambda_i}{S} \geq 0$, tedy $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{S} \cdot x_i$ je konvexní kombinace $n-1$ bodů z X, a tudíž z indukčního předpokladu leží v $\operatorname{conv}(X)$. Také $\lambda_n + S = 1$, $\lambda_n \geq 0$, $S \geq 0$, tedy $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ leží na úsečce mezi dvěma body z $\operatorname{conv}(X)$. Protože $\operatorname{conv}(X)$ je konvexní množina, leží i tento bod v $\operatorname{conv}(X)$.

Nyní musíme ještě ukázat, že všechny body z $\operatorname{conv}(X)$ leží v konvexním obalu množiny X. Nechť A je konvexní obal X. Množina A obsahuje X a je konvexní. Z definice je tedy $\operatorname{conv}(X)$ obsažen v A, jak chceme. □

Vidíme tedy, že definice jsou ekvivalentní. Můžeme proto značit konvexní obal $\operatorname{conv}(X)$. V následující větě si ukážeme, kolik bodů stačí na vyjádření jednoho jako konvexní kombinace.

Věta. (Carathéodory) *Ať X je množina bodů z $\mathbb{R}^d$. Potom každý bod z $\operatorname{conv}(X)$ lze vyjádřit jako konvexní kombinace nejvýše $d+1$ bodů z X.*



Důkaz. Vezměme libovolný bod $x \in \operatorname{conv}(X)$ a ukažme, že pro něj tvrzení platí. Už víme, že x lze vyjádřit jako konvexní kombinace nějakých bodů z X, označme ji

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i. \tag{1}$$

Pokud $n \leq d+1$, vyhráli jsme. Pokud $n > d+1$, zkusíme najít konvexní kombinaci s méně body. Využijeme toho, že bodů je aspoň $d+2$, takže musí být afinně závislé. Jeden z nich tedy umíme vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních, nechť je to BÚNO x_n. Označme tuto kombinaci

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i,$$

pro jednoduchost dále označme $\mu_n = -1$, čímž dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i. \tag{2}$$

Všimni si, že $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$. BÚNO můžeme předpokládat, že jsou všechna μ_i nenulová. Teď budeme chtít rovnice (1) a (2) sečíst tak, aby se nám vynuloval nějaký koeficient. Zkusme tedy k rovnici

(1) přičíst rovnici (2) přenásobenou α, kde α musíme nějak šikovně zvolit. Chceme při tom získat novou konvexní kombinaci, takže všechny koeficienty výsledku by měly být nezáporné. Ukáže se, že správnou volbou je

$$\alpha = \min_{\mu_i < 0} \left(-\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right).$$

Jinými slovy $\alpha = -\frac{\lambda_j}{\mu_j}$, kde j zvolíme tak, aby α byla kladná a zároveň co nejmenší. Sečtením daných rovnic nyní získáme

$$x + \alpha \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i,$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha \mu_i) x_i.$$

Na indexu j dostáváme

$$\lambda_j + \alpha \mu_j = \lambda_j - \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot \mu_j = 0.$$

Zároveň jsou všechny koeficienty nezáporné, protože pro kladné μ_i platí

$$\lambda_i + \alpha \mu_i \geq \lambda_i \geq 0$$

a pro záporné μ_i platí

$$\lambda_i + \alpha \mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot \mu_i \geq \lambda_i - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \cdot \mu_i = 0.$$

Zároveň ovšem

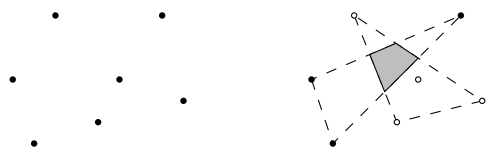
$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 + \alpha \cdot 0 = 1.$$

Máme novou konvexní kombinaci, která obsahuje o jedna méně bodů (ten s nulovým koeficientem můžeme zahodit), takže jsme hotovi. □

Pro lepší náhled si rozmyslíme, co Carathéodoryho věta říká pro menší dimenze. Konkrétně na přímce a v rovině (pro $d = 1$ a $d = 2$) se může zdát, že je tvrzení skoro triviální. Pozor ale na to, že množina X může být nekonečná, což situaci značně komplikuje.

Úloha 8. Mějme množinu bodů X v prostoru, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině. Dokaž, že když každých pět bodů z X tvoří vrcholy konvexního mnohostěnu, tak i celá množina X tvoří vrcholy konvexního mnohostěnu.

Věta. (Radonovo lemma) *Nechť A je množina aspoň $d + 2$ bodů v $\mathbb{R}^d$. Potom existují její dvě disjunktní podmnožiny A_1 a A_2, jejichž konvexní obaly se protínají.*



Za chvíli si ukážeme důkaz pro obecné d. Zkus si to ale nejdřív rozmyslet v rovině.

Cvičení 12. Dokaž Radonovo lemma pro $d = 2$.

Cvičení 13. Mohli bychom požadovat, že A_1, A_2 jsou neprázdné. Rozmysli si, proč to není potřeba.

Důkaz. Nechť je bodů právě $d+2$, kdyby kdyby jich bylo víc, jenom nám to pomůže. Stejně jako v Carathéodoryho větě využijeme toho, že bodů je hodně, takže mezi nimi existují nějaké závislosti. Víme, že jsou afinně závislé, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+2}$, z nichž alespoň jedno je nenulové, $\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i = 0$ a

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i x_i = 0.$$

Nechť A_1 je množina těch i od 1 do $d+2$, pro něž $\alpha_i \geq 0$, A_2 jsou ostatní. Tvrdíme, že toto už nám stačí. Označme β_i absolutní hodnotu α_i pro $i \in A_2$. Potom platí

$$\sum_{i \in A_1} \alpha_i x_i = \sum_{i \in A_2} \beta_i x_i.$$

To je skoro to, co chceme, protože na každé straně je lineární kombinace s nezápornými koeficienty. Ještě ale potřebujeme, aby součet koeficientů byl 1. Protože ale $\alpha_i + \cdots + \alpha_n = 0$, platí $\sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} \beta_i$. Označme tento součet S. Potom

$$\sum_{i \in A_1} \frac{\alpha_i}{S} x_i = \sum_{i \in A_2} \frac{\beta_i}{S} x_i$$

jsou už opravdu konvexní kombinace. Protože alespoň jedno α_i bylo nenulové, musí být nějaké α_i kladné a nějaké záporné, aby se posčítaly na 0. Množiny A_1 a A_2 jsou tedy neprázdné množiny a důkaz je hotov. □

Věta. (Helly) *Nechť $n \geq d+1$ a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^d$. Předpokládejme, že průnik každých $d+1$ těchto množin je neprázdný. Potom je průnik všech těchto množin neprázdný.*

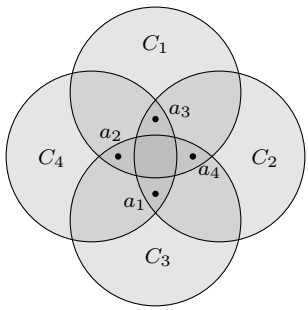
Než se pustíme do důkazu, hodí se získat určitou intuici za formulací věty.

Cvičení 14. Rozmysli si, proč musí platit $n \geq d+1$.

Cvičení 15. Najdi nekonvexní množiny, pro něž Hellyho věta neplatí.

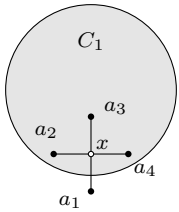
A nyní hurá na důkaz!

Důkaz. Vezmeme si pevné d a budeme postupovat indukcí podle počtu množin. Pro $n = d+1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme nyní $n = d+2$. Pokud vynecháme nějakou množinu C_i, mají zbylé neprázdný průnik. Můžeme si proto z něj vzít nějaký bod a_i, označme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{d+2}\}$. Pro každé j pak platí, že body A kromě a_j leží v C_j.



$\{a_2, a_3, a_4\} \subseteq C_1$

Protože C_j je konvexní, leží i konvexní obal libovolné podmnožiny těchto bodů v C_j. Pokud bychom vzali libovolný bod z $\operatorname{conv}(A)$, nemusel by ležet v C_j. Jakmile ale rozdělíme A na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny A_1 a A_2 a vezmeme bod x z $\operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2)$, bude x ležet v C_j. To proto, že a_j může ležet jen v jedné z množin A_1 a A_2, takže konvexní obal té druhé bude podmnožinou C_j. Na tuto situaci ale máme přesně nachystané Radonovo lemma. Vyhovující podmnožiny A, které budou mít neprázdný průnik, tedy určitě najdeme.



$$\operatorname{conv}(\{a_1, a_3\}) \cap \operatorname{conv}(\{a_2, a_4\}) \neq \emptyset$$
$$x \in \operatorname{conv}(\{a_2, a_4\}) \subseteq C_1$$

Zbývá už jen případ, kdy $n > d+2$. Předpokládejme, že pro $n-1$ jsme tvrzení již dokázali. Již víme, že každých $d+2$ zadaných množin má neprázdný průnik. Pokud tedy dvě množiny nahradíme jejich průnikem, bude stále platit, že každých $d+1$ množin má neprázdný průnik. Zároveň máme o jednu množinu méně, takže můžeme použít indukční předpoklad a průnik všech těchto $n-1$ množin je neprázdný. Je to ovšem i průnik původních n množin, čímž je indukce hotova. □

Úloha 9. Řekneme, že konečná množina bodů v rovině je *pospolitá*, pokud pro každé tři její body existuje jednotkový kruh, který tyto body obsahuje. Dokaž, že každou pospolitou množinu lze pokrýt jednotkovým kruhem. (PraSe 40–4j–4b)

Mohlo by Tě napadnout, že když Hellyho věta platí pro hodně množin, kterých je ale konečně, mohla by platit i pro nekonečně množin. Skutečně nekonečná verze Hellyho věty existuje, avšak je potřeba přidat pár dalších omezení.

Věta. (Nekonečný Helly) *Hellyho věta platí i pro nekonečně mnoho množin, jestliže jsou všechny navíc uzavřené a omezené.*

Na důkaz nekonečné Hellyho věty bychom potřebovali zavést docela dost další teorie[3]. Věta zmiňuje uzavřené množiny, což v podstatě znamená „množiny s okrajem“. Omezené zase znamená, že se neroztahují do nekonečna (můžeme je zavřít do krabice). Jednoduchým příkladem takových množin v d dimenzích jsou třeba konvexní mnohostěny[4].

Následující cvičení ukazují, proč je omezenost a uzavřenost množin potřeba. Protipříklad totiž můžeme najít už v jednom rozměru.

Cvičení 16. Najdi množinu intervalů, které jsou uzavřené a každé dva mají neprázdný průnik, ale všechny neprázdný průnik nemají.

Cvičení 17. Najdi množinu intervalů, které jsou omezené a každé dva mají neprázdný průnik, ale všechny neprázdný průnik nemají.

Úloha 10. Lenka nakreslila na papír křivku a všimla si, že vzdálenost libovolných dvou jejích bodů je nejvýše 1. Dokaž, že Lenka může namalovat čtverec o straně 1, který zakryje celou křivku.

[3]Důkaz využívá věty o kompaktnosti, která nám (za určitých podmínek) dovoluje říct „platí to pro všechny konečné množiny, tak to bude platit i pro všechny nekonečné“.

[4]Konvexní mnohostěn ve více dimenzích můžeme definovat například jako konvexní obal konečné množiny bodů.

Závěr

Doufáme, že sis výlet do světa konvexních množin s námi užil(a). V příštím díle využijeme nabytých poznatků a zobecníme pojem mediánu[5] do více dimenzí.

Těšíme se na příští setkání. Majda a Pepa

Návody ke cvičením

1. To zvládneš.

2. Zvol body jako vrcholy pravidelného mnohoúhelníka.

3. Co se stane, když něčím vynásobíš nulový vektor (tj. vektor samých nul)?

4. Použij předchozí cvičení.

9. Ano, existuje.

12. Jsou jen dva případy.

16. Musí být neomezené. Intervaly tvaru $[k, \infty)$ jsou uzavřené.

17. Musí být otevřené. Vezmi nějaký bod, který je krajním bodem všech těchto intervalů.

Návody k úlohám

1. Uvaž nějaké dva po sobě jdoucí body na konvexním obalu.

2. Umíš vyrobit alespoň jednu zatáčku na správnou stranu? O čem je tato kapitola?

4. Není. Přelož rozbíjení do řeči konvexních obalů.

5. Kdy je střed kružnice opsané mimo trojúhelník? Jaký je u něj úhel?

6. Začni na konvexním obalu a zametej.

7. Fungují jen pravidelné n-úhelníky.

8. Přímočará aplikace Caratheodoryho věty, postupuj sporem.

9. Podívej se na kruhy o poloměru 1 se středem v zadaných bodech.

10. Pro tři čtverce s rovnoběžnými stranami platí, že když se každé dva z nich protínají, protínají se i všechny tři.

Řesení cvičení

1. Nejméně tři, nejvíce n.

2. Body umístíme do vrcholů pravidelného 4027úhelníku. Barvy se budou pravidelně střídat kromě dvou modrých bodů, co budou vedle sebe. Na obvodu tohoto mnohoúhelníka je nyní 4026 dvoubarevných úseček. Aby byly body správně oddělené, musí být každá z těchto úseček přerušena přímkou. Každá přímka ale může přerušit maximálně 2 úsečky, takže potřebujeme aspoň 2013 přímek.

[5] Medián je prostřední prvek.

3. Mějme lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ bodů z X. Přičtením $\big(1-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\big)$-násobku počátku se součet nezmění, avšak rázem se z kombinace stane afinní.

4. Když $O \in X$, platí $X = X \cup \{O\}$, tedy stačí použít předchozí cvičení.

5. Každá konvexní kombinace je také afinní kombinací, tedy umíme-li jeden bod vyjádřit jako konvexní kombinaci ostatních, umíme ho vyjádřit i jako afinní kombinaci ostatních.

6. Každá afinní kombinace je také lineární kombinací, tedy umíme-li jeden bod vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních, umíme ho vyjádřit i jako lineární kombinaci ostatních.

7. Ne. Například pro libovolné n jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku konvexně nezávislé.

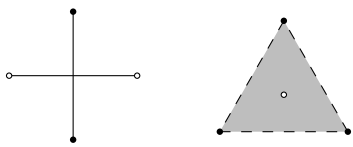
8. Očíslujme množiny zleva doprava, seshora dolů od 1 do 6. Konvexně závislé jsou množiny 3 a 6. Afinně závislá je navíc i množina 2, protože to jsou čtyři množiny v rovině. Lineárně závislé jsou i všechny tři zbylé množiny. Množina 1 proto, že jsou to tři body v rovině. Množina 5 proto, že to jsou dva body na přímce s počátkem. Množina 4 proto, že součet přes prázdnou množinu je nulový vektor, tedy samotný počátek je lineárně závislý. Díky podmínkám na součet koeficientů už ale není ani afinně, ani konvexně závislý.

9. Třeba přímka.

10. Ať I množina, kterou budeme indexovat dané konvexní množiny (můžou to být třeba i reálná čísla). Chceme ukázat, že průnik konvexních množin C_i, $i \in I$, je neprázdný. Pokud body x a y leží v tomto průniku, leží speciálně v C_i pro nějaké $i \in I$. Protože C_i je konvexní, leží v C_i i úsečka xy. To platí pro všechna $i \in I$, tedy tato úsečka leží v průniku. To přesně znamená, že průnik je konvexní.

11. Vyhovuje například prázdná množina.

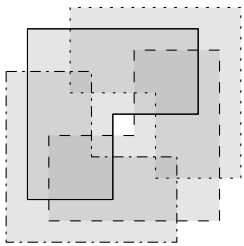
12. Z kombinatorického hlediska mají čtyři body v rovině jen dvě možné konfigurace:



13. Konvexní obal prázdné množiny je zase prázdná množina, takže kdyby jedna z množin A_1, A_2 byla prázdná, konvexní obaly by se rozhodně neprotínaly.

14. Pro menší n nemáme ani $d+1$ množin, tedy podmínka nic neříká a množiny mohou být klidně disjunktní.

15. Fungují třeba čtyři množiny ve tvaru písmene „L“, každá jinak otočená.

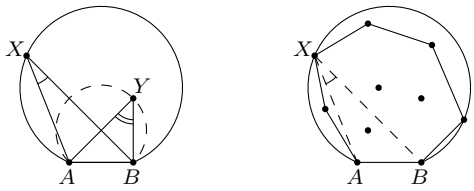


16. Vyhovuje množina $\{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

17. Vyhovuje množina $\{\big(0, \frac{1}{n}\big) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Řesení úloh

1. Uvažme dva po sobě jdoucí body na konvexním obalu, označme je A a B. Ze zbylých bodů nyní vyberme bod X takový, že velikost úhlu AXB je minimální. Kružnice opsaná AXB nyní obsahuje všechny ostatní body uvnitř nebo na hranici. Všechny ostatní body totiž leží v jedné polorovině, a navíc vidí úsečku AB pod větším úhlem. Teď se nám hodí trocha znalostí z klasické geometrie, konkrétně následující tvrzení (plynoucí z věty o obvodovém úhlu). Jestliže body X a Y leží ve stejné polorovině vůči úsečce AB, potom je $|\sphericalangle AXB| \leq |\sphericalangle AYB|$ ekvivalentní tomu, že Y leží uvnitř kružnice opsané AXB. Tím je tvrzení dokázáno.



2. Úlohu vyřešíme indukcí podle počtu úseček na trati. Dokonce budeme dokazovat trochu silnější tvrzení – ukážeme, že trať může začít kdekoli na konvexním obalu. Pro jednu úsečku na trati nejsou zatáčky, takže tvrzení určitě platí. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1$ a dokažme jej pro n. Volbou první úsečky zařídíme, aby první zatáčka byla správně levotočivá či pravotočivá a aby se tato úsečka neprotnula s žádnou později postavenou. Začneme v kterémkoli vrcholu konvexního obalu daných bodů. Úsečku povedeme do některého ze dvou sousedních vrcholů na obalu. Tím zajistíme, že v dalším kroku budeme začínat opět na konvexním obalu bodů, které ještě nebyly v závodní trati. Také tím zajistíme, aby se tato úsečka s žádnou další neprotnula. Volbou směru této úsečky jednoznačně určíme, jestli další zatáčka bude pravotočivá, nebo levotočivá – když úsečku uděláme po směru hodinových ručiček, další zatáčka bude pravotočivá, když proti směru, bude zatáčka levotočivá. Stačí nám tedy správně zvolit směr první úsečky a zbytek platí z indukce.

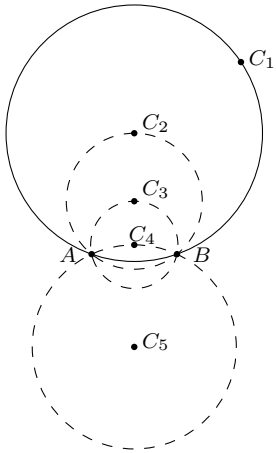
3. Dokážeme, že odpověď je $\frac{180^\circ}{n}$. Vezměme dva sousední body na konvexním obalu A a X_1. Ostatní body označíme $X_2, \ldots, X_{n-1}$, aby v konvexním úhlu X_iAX_{i+1} nebyly žádné další (otáčíme přímkou v bodě A, body označujeme v pořadí, v němž je potkáme). Všechny body leží v jedné polorovině od AX_1. Tudíž víme $|\sphericalangle X_1AX_{n-1}| = |\sphericalangle X_1AX_2| + \cdots + |\sphericalangle X_{n-2}AX_{n-1}| \geq (n-2)\cdot\varphi$ a také $180^\circ - |\sphericalangle X_1AX_{n-1}| = |\sphericalangle X_1X_{n-1}A| + |\sphericalangle X_{n-1}X_1A| \geq 2\cdot\varphi$. Dohromady dostáváme

$$180^\circ = |\sphericalangle X_1AX_{n-1}| + 180^\circ - |\sphericalangle X_1AX_{n-1}| \geq n\cdot\varphi,$$

z čehož máme horní odhad. Jako konstrukce postačí pravidelný n-úhelník.

4. Pro spor uvažme konvexní obal koncových bodů zadaných úseček, vezmeme jeden z koncových bodů, který na něm leží, a označíme ho A. Ať AB je zadaná úsečka. Kdyby polopřímka BA rozbíjela úsečku CD, ležel by bod A uvnitř konvexního obalu BCD. To je spor s tím, že ležel na konvexním obalu všech bodů.

5. Pro spor nechť existují tři body S, které neleží na přímce. Potom můžeme uvážit konvexní obal S a vzít na něm dva sousední body A a B. Také existuje nějaký další bod $C_1 \in S$, který s A a B neleží na přímce. Nyní rekurzivně definujeme $C_{n+1} \in S$ jako střed kružnice opsané ABC_n. Víme, že $|\sphericalangle AC_{n+1}B| = 2\cdot|\sphericalangle AC_nB|$. Pro nějaké k tedy bude platit $|\sphericalangle AC_kB| > 90^\circ$, takže C_{k+1} bude ležet v opačné polorovině od AB než C_k. To je ale spor s tím, že A a B jsou sousední body na konvexním obalu.



6. Pokud jsou na konvexním obalu body obou barev, existují na něm alespoň dvě místa, kde po sobě následuje modrý a červený bod. Potom nám stačí vzít přímku skrze tyto dva body, protože na jedné straně bude mít 0 modrých a 0 červených bodů, na druhé $n-1$ modrých a $n-1$ červených. Dále nechť jsou na konvexním obalu jen body jedné barvy, třeba modré. Potom si můžeme vybrat jeden z nich a otáčet v něm přímkou. Stejně jako v příkladu o párování černých a bílých bodů ukážeme, že lze najít vyrovnanou přímku. Začneme-li s jiným bodem na konvexním obalu, dostaneme určitě jinou vyrovnanou přímku, takže opět máme alespoň dvě.

7. Body na konvexním obalu S označíme postupně A_1, A_2, …, A_k. Potom A_i musí ležet na ose $A_{i-1}A_{i+1}$, jinak by jeho obraz nebyl v konvexním obalu S. Tedy všechny strany $A_1A_2\ldots A_k$ jsou stejně dlouhé. Také A_i musí být obraz A_{i+1} podle osy $A_{i-1}A_{i+2}$, takže všechny úhly k-úhelníku jsou stejně velké. Tím pádem $A_1A_2\ldots A_k$ musí být pravidelný k-úhelník.

Nyní označíme O střed $A_1A_2\ldots A_k$. Body z konvexního obalu se musí zobrazit opět na konvexní obal, takže každá osa symetrie S musí být i osou symetrie $A_1A_2\ldots A_k$. Pro každý bod $X \in S$ musí tudíž O ležet na ose XA_1 i XA_2, takže X leží na kružnici opsané $A_1A_2\ldots A_k$. Tedy už je to nutně jeden z bodů A_i.

8. Pro spor nechť celá množina X netvoří vrcholy konvexního mnohostěnu. To znamená, že nějaký její bod je v konvexním obalu ostatních. Podle Carathéodoryho věty jej můžeme vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše čtyř dalších bodů. Tím jsme ale dostali bod uvnitř konvexního obalu čtyř jiných, takže těchto pět bodů dohromady nemůže tvořit konvexní mnohostěn.

9. Podíváme se na kruhy o poloměru 1 se středem v zadaných bodech, kruh se středem x označíme C_x. Podmínka, že každé tři body lze pokrýt jednotkovým kruhem, vlastně říká, že pro každé tři body a, b, c se C_a, C_b a C_c protínají v alespoň jednom bodě. Kruh je konvexní množina, takže můžeme použít Hellyho větu. Z toho dostaneme, že se všechny kruhy protínají v alespoň jednom bodě, který vezmeme za střed jednotkového kruhu, který bude pokrývat všechny body.

10. Pro každý bod x Lenčiny křivky uvažme čtverec o straně 1 se středem v x, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Podle podmínky na vzdálenosti se každé dva čtverce musí protínat. To zatím na použití nekonečné Hellyho věty nestačí. Jednoduchým rozborem případů ale můžeme dokázat, že se musí protínat i každé tři. Čtverce jsou uzavřené a omezené, takže můžeme aplikovat nekonečnou Hellyho větu. Všechny čtverce mají společný bod, stačí nám tedy uvážit čtverec o straně jedna se středem v tomto bodě a jsme hotovi.

Kombinatorická geometrie III – Mnoho průsečíků

Milý příteli,
ve třetím díle naší cesty kombinatorickou geometrií se ze začátku ještě vrátíme ke konvexním množinám a ukážeme si příklad využití Hellyho věty. Potom už se budeme věnovat průsečíkům z názvu tohoto dílu. Definujeme si grafy a budeme zkoumat, jak se jejich hrany (ne)protínají, když si je nakreslíme do roviny. Pokud nevíš, co to takový graf je, ničeho se neboj, vše si vysvětlíme. Zamyslíme se nad tím, jak se některé jevy chovají, když máme objektů mnoho. Například je jasné, že když v rovině vyznačíme dva body a dvě přímky, existují nejvýše tři dvojice (B, p), kde B je bod a p přímka taková, že na ní B leží. Jak to ale dopadne, když budeme mít tisíc přímek a tisíc bodů? Nebo milion přímek a milion bodů? To se dozvíš na samém konci seriálu.

Přejeme příjemné čtení a mnoho zdaru při řešení soutěžních úloh.

Pepa a Majda

Středobody

Možná už jsi někdy slyšel(a) pojem *medián*, třeba v kontextu statistiky. Například se typicky uvádí medián mezd místo jejich průměru. Medián obvykle znamená prostřední hodnota z několika čísel. Naše definice se možná bude trochu lišit od té, na kterou jsi zvyklý (zvyklá), ale uvidíš, že to není moc velký rozdíl.

Definice. Nechť X je konečná množina reálných čísel. O reálném čísle m řekneme, že je *medián* množiny X, jestliže je aspoň polovina čísel v X větší nebo rovna m a aspoň polovina čísel v X je menší nebo rovna m.

Všimni si, že medián množiny X nemusí nutně být prvkem X. Mediánem množiny $\{-22.7, \pi, 42\}$ je π. Naopak medián množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ není jednoznačně určen, mediánem je libovolné číslo z uzavřeného intervalu $\langle 2, 3\rangle$, tedy třeba 2, $\sqrt{5}$ nebo e. Tohle je rozdíl oproti obvyklejší definici mediánu, kdy by při sudé velikosti množiny byl mediánem průměr prostředních dvou čísel (pro množinu $\{1, 2, 3, 4\}$ by tedy medián byl pouze 2.5). Čísla jsou vlastně body na reálné ose. My se budeme ale zabývat body i ve více rozměrech než jen v jednom. Tudíž se nám víc hodí definice výše, protože se bude dobře zobecňovat do více dimenzí.

Definice. Nechť X je konečná množina bodů v $\mathbb{R}^d$. Bod $m \in \mathbb{R}^d$ je *α-středobod*[1] množiny X, jestliže každý uzavřený poloprostor obsahující m obsahuje aspoň $\alpha|X|$ bodů[2] z X.

Tady narážíme na problém, že jsme si vlastně nedefinovali uzavřený poloprostor. V $\mathbb{R}^1$ tím myslíme polopřímku včetně hraničního bodu, v $\mathbb{R}^2$ je uzavřený poloprostor polorovina včetně hraniční

[1] Název *středobod* jsme si vymysleli a není standardní, anglicky se mu říká *centerpoint*.

[2] Symbol $|X|$ označuje počet prvků (v tomto případě bodů) množiny X.

přímky, v $\mathbb{R}^3$ je to rovina a všechno v jednom směru od ní atd. Asi si dokážeš představit, jak poloprostory fungují ve vyšších dimenzích. Nám bude stačit s poloprostory pracovat intuitivně, kdyby Tě ale i tak zajímalo, jak je definovat pořádně, uvádíme následující definici.

Definice. Pro libovolný nenulový vektor $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ a reálné číslo b tvoří množina bodů $x = (x_1, \ldots, x_d)$ splňujících

$$\sum_{i=1}^{d} a_i x_i \geq b$$

uzavřený poloprostor.

Kdybychom chtěli otevřený poloprostor (bez hranice), stačí nerovnost v definici změnit na ostrou. Teď už ale na formality spojené s poloprostory zapomeňme a pojďme se zamyslet nad tím, co vlastně středobod znamená.

Cvičení 1. Rozmysli si, že pro $d = 1$ a $\alpha = \frac{1}{2}$ definice středobodu splývá s mediánem.

Aby α-středobod existoval, koeficient α může být nejvýše 1. I když bude koeficient nejvýše jedna, pořád nemusí α-středobod existovat.

Cvičení 2. Jak vypadají množiny bodů, pro které existuje 1-středobod?

Naopak pro malé α je středobodů mnoho.

Cvičení 3. Jak vypadá množina 0-středobodů?

Cvičení 4. Nechť X je konečná neprázdná množina bodů v rovině. Jak vypadá množina jejích $\frac{1}{|X|}$-středobodů?

Nabízí se nám přirozená otázka, a to pro jaké největší α ještě bude α-středobod existovat. To samozřejmě závisí na tom, jak vypadá množina X. Možná by proto bylo lepší se zeptat, pro jaké největší α existuje α-středobod pro libovolnou množinu X, máme-li pevně danou dimenzi prostoru, v němž se X nachází. Ukazuje se, že tato hodnota je nepřímo úměrná dimenzi prostoru, ve kterém se pohybujeme.

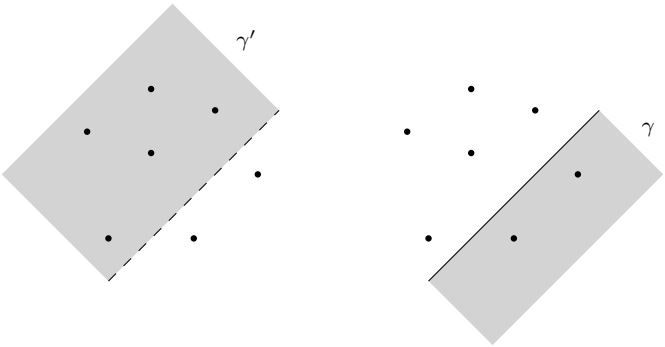
Tvrzení. *Pro libovolnou konečnou množinu X bodů z $\mathbb{R}^d$ existuje její $\frac{1}{d+1}$-středobod.*

Pro jednoduchost se domluvme, že když budeme dále v textu psát středobod, myslíme tím $\frac{1}{d+1}$-středobod. Než si toto tvrzení dokážeme, ukažme si nejdřív ekvivalentní definici α-středobodu.

Lemma. *Bod m je α-středobod množiny X právě tehdy, když každý otevřený poloprostor obsahující více než $(1-\alpha)|X|$ bodů z X zároveň obsahuje i m.*

Důkaz. Dokážeme postupně obě implikace. Nechť m je α-středobod. Kdyby existoval otevřený poloprostor γ' obsahující více než $(1-\alpha)|X|$ bodů z X a neobsahující m, můžeme uvážit jeho doplněk. Tento doplněk $\gamma = \mathbb{R}^d \setminus \gamma'$ je uzavřený poloprostor, který obsahuje m a méně než $\alpha|X|$ bodů z X. Potom by ale m nemohl být α-středobod.

Nyní předpokládejme, že každý otevřený poloprostor obsahující více než $(1-\alpha)|X|$ bodů z X zároveň obsahuje i m. Teď uvážíme libovolný uzavřený poloprostor γ obsahující m. Jeho doplněk je otevřený poloprostor γ' neobsahující m, takže může obsahovat nejvýše $(1-\alpha)|X|$ bodů z X. To znamená, že náš původní poloprostor γ obsahoval aspoň $\alpha|X|$ bodů z X. Tím jsme ukázali, že m je α-středobod.

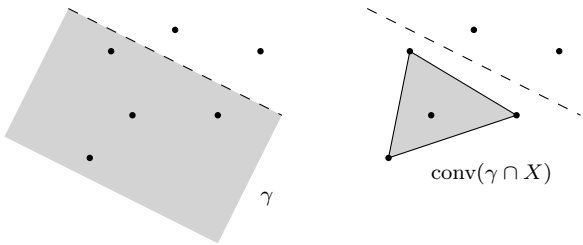


□

Teď už můžeme dokázat tvrzení o existenci středobodu.

Důkaz. Nechť X je libovolná konečná množina v $\mathbb{R}^d$. Uvažme všechny otevřené poloprostory, které obsahují více než $\frac{d}{d+1}|X|$ bodů z X. Kdyby se nám podařilo ukázat, že mají neprázdný průnik, máme vyhráno, protože všechny body uvnitř tohoto průniku by podle předchozího lemmatu byly středobody.

K důkazu, že se nějaké množiny protínají, by se nám mohla hodit Hellyho věta, kterou jsme si dokázali v minulém díle. Jenže otevřených poloprostorů je nekonečně mnoho. A na použití nekonečné Hellyho věty bychom potřebovali, aby byly uzavřené a omezené, otevřené poloprostory bohužel nejsou ani jedno z toho. Uděláme proto trik, místo otevřeného poloprostoru γ uvážíme konvexní obal všech bodů z X, které leží v γ, tedy $\operatorname{conv}(\gamma \cap X)$. Tento konvexní obal už je určitě uzavřený i omezený. Když dokážeme, že se protínají tyto konvexní obaly, určitě se budou protínat i otevřené poloprostory, protože konvexní obaly leží uvnitř těchto poloprostorů neboli $\operatorname{conv}(\gamma \cap X) \subset \gamma$.



Teď už nám podle nekonečné Hellyho věty stačí dokázat, že se protíná každých $d+1$ výše popsaných konvexních obalů. Označme si konvexní obaly postupně $\operatorname{conv}(X_1), \ldots, \operatorname{conv}(X_{d+1})$, platí $|X_i| > \frac{d}{d+1}|X|$. Když dokážeme, že množiny X_i mají neprázdný průnik, určitě budou mít neprázdný průnik i jejich konvexní obaly. Teď už si jen stačí všimnout, že v každé množině chybí méně než $\frac{1}{d+1}|X|$ bodů, takže v průniku jich chybí méně než $(d+1)\frac{1}{d+1}|X|$. Zapsáno formálně

$$\left|\bigcap_{i=1}^{d+1} X_i\right| \geq |X| - \sum_{i=1}^{d+1} |X \setminus X_i| > |X| - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{d+1}|X| = |X| - \frac{d+1}{d+1}|X| = 0.$$

Tím je splněna podmínka nekonečné Hellyho věty a existence středobodu je dokázána. □

Všimni si, že pro $d = 1$ nám toto tvrzení říká, že existuje medián.

Cvičení 5. Rozmysli si, že koeficient $\frac{1}{d+1}$ nejde zlepšit, tedy že pro $\alpha > \frac{1}{d+1}$ nemusí α-středobod existovat.

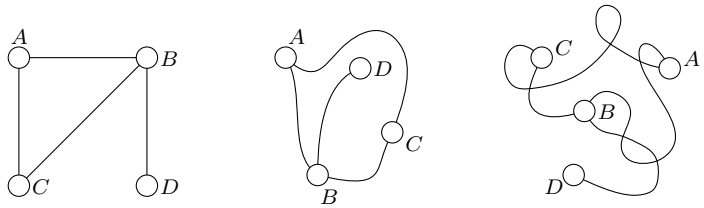
Grafy

Teď se na chvíli mírně odkloníme od předchozího tématu a budeme se bavit o teorii grafů. Nebude se jednat o grafy funkcí, ale půjde o kombinatorické objekty.

Definice. *Graf* $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice tvořená konečnou neprázdnou množinou *vrcholů* V a množinou *hran* $E \subseteq \binom{V}{2}$, kde prvky E jsou neuspořádané dvojice vrcholů.

Množina vrcholů může obsahovat prakticky cokoliv – můžeš si třeba představit množinu lidí, kde hrany vedou mezi těmi, co se znají. Nebo vrcholy můžou být třeba města a hrany letecké linky mezi nimi.

Pro začátek bychom si takový graf rádi nakreslili. Vrcholy by byly reprezentovány puntíky a hrany by byly čáry mezi nimi. Představme si, že se sešli Alice, Bára, Cyril a David. Bára se zná se všemi, a navíc se ještě zná Alice s Cyrilem. Odpovídající graf bychom mohli nakreslit třeba jako na obrázku. Všechna tři nakreslení reprezentují ten stejný graf, přestože vypadají jinak.



Po hranách nutně nepožadujeme, aby to byly úsečky, klidně to mohou být složitější křivky. Můžeš si ale všimnout, že některá nakreslení jsou přehlednější než jiná. Zejména to poslední je docela zmatené, hlavně kvůli křížení hran. Není proto překvapivé, že budeme upřednostňovat nakreslení, kde se hrany nekříží.

Pojďme si říct, co je to nakreslení grafu. Představujeme si ho prostě jako obrázek, na kterém je graf. Formálně je ale *nakreslení* nějaké zobrazení z grafu do roviny. Vrcholy se zobrazí na kruhy, které jsou navzájem disjunktní. Hrany se zobrazí na křivky[3], jejichž počáteční a koncové body jsou na hranicích kruhů odpovídajících vrcholům, které tato hrana spojuje. Zároveň by křivka neměla protínat sama sebe (jako je tomu na v případě hrany AC na třetím obrázku) ani kruhy odpovídající vrcholům kromě počátečního a koncového bodu. Problémem této definice je, že nevíme, co to je křivka. Ta navíc může být docela složitým objektem. Nám ale bude stačit s ní zacházet intuitivním způsobem a formality přenechat matematické analýze.

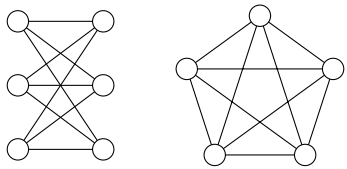
Pro nás budou zajímavé grafy, které lze nakreslit bez křížení hran.

Definice. Nakreslení grafu nazveme *rovinné*, jestliže se v něm nekříží hrany.

Definice. O grafu řekneme, že je *rovinný*, jestliže má rovinné nakreslení.

Nejsou náhodou všechny grafy rovinné? Nejsou, důležitými protipříklady jsou grafy nazývané $K_{3,3}$ a K_5, které vidíš na obrázku níže. Graf K_5 má pět vrcholů, mezi každými dvěma vrcholy vede hrana. Graf $K_{3,3}$ má dvě části, v každé jsou tři vrcholy. Hrany vedou mezi vrcholy, které jsou v různých částech.

[3]Pod pojmem *křivka* si prostě představ něco, co zvládneš nakreslit jedním tahem, aniž bys zvedl(a) tužku z papíru.



$K_{3,3}$ K_5

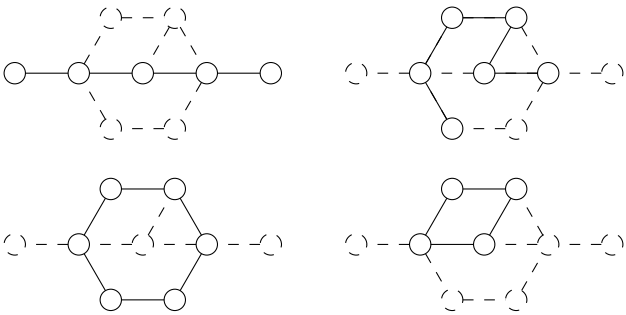
Grafy jsme nakreslili hezky symetricky za cenu toho, že se jejich hrany protínají na vícero místech. Není těžké najít nakreslení, kde bude průsečíků hran méně. Ať se ale budeš snažit sebevíc, aspoň jeden tam zůstane.

Cvičení 6. Najdi nakreslení $K_{3,3}$ a K_5, kde je jenom jeden průsečík.

$K_{3,3}$ a K_5 jsou nejmenší grafy, které nejsou rovinné. Když z nich smažeme libovolnou hranu, už rovinné budou. Navíc každý graf, který není rovinný, musí v jistém smyslu[4] obsahovat $K_{3,3}$ nebo K_5.

Abychom se mohli o grafech dál bavit, zavedeme si několik pojmů.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ jsou nějaké jeho vrcholy a $e_1, \ldots, e_n$ jsou jeho hrany takové, že $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Pokud $v_i \neq v_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq n+1$, nazýváme posloupnost $v_1 e_1 v_2 \ldots v_n e_n v_{n+1}$ *cestou*. Pokud $v_i \neq v_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq n$ a $v_1 = v_{n+1}$, nazýváme $v_1 e_1 v_2 \ldots v_n e_n v_{n+1}$ *kružnicí* nebo *cyklem*.



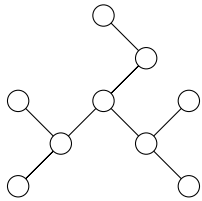
Pokud řekneme, že *mezi vrcholy u a v vede cesta*, myslíme tím, že při značení z předcházející definice existuje cesta splňující $u = v_1$ a $v = v_{n+1}$.

Definice. Graf G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vede cesta.

Definice. Podmnožinu vrcholů $V' \subseteq V$ nazveme *komponentou souvislosti*, jestliže mezi každými dvěma jejími vrcholy vede cesta a nelze do ní přidat žádný vrchol, aniž by tato vlastnost byla porušena.

Definice. *Strom* je souvislý graf, který nemá žádné kružnice.

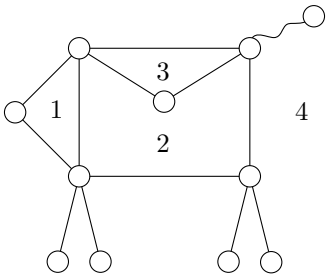
[4]Musí je obsahovat jako tzv. minor, což říká Kuratowského věta. Graf H je *minor* grafu G, pokud umíme H z G dostat nějakou posloupností následujících tří operací: smazání vrcholu a hran, které z něho vycházejí; smazání hrany; smazání hrany a sloučení obou příslušných vrcholů do jednoho.



O stromech je známo, že mají o jedna méně hran než vrcholů neboli pro ně platí $|E| = |V| - 1$. Má-li graf hran více, musí už nutně obsahovat kružnici. Obojí je snadné dokázat. Pokud jsi o stromech ještě neslyšel(a), můžeš si tato tvrzení dokázat pro seznámení se s právě zavedenými pojmy. Důkaz také nalezneš na straně 30 seriálu z 34. ročníku: *https://prase.cz/archive/34/serial.pdf*.

Eulerova formule

Definice. Mějme rovinné nakreslení grafu. Oblastem, na které je rovina tímto nakreslením rozdělena, budeme říkat *stěny*.

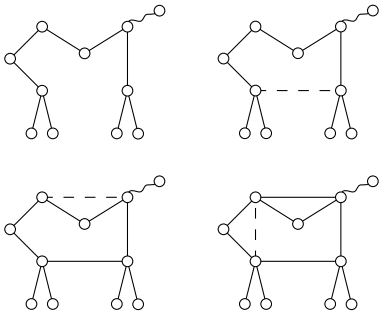


Poznamenejme, že jedna ze stěn každého rovinného nakreslení je nekonečná, té se zpravidla říká *vnější* stěna. Na první pohled není vůbec jasné, jestli počet stěn závisí na nakreslení. Způsobů, jak nakreslit rovinný graf, je spousta, nemohlo by se stát, že některá z nich budou mít více stěn než jiná? Odpověď je ne, nemohlo. Dokonce můžeme z počtu vrcholů a hran grafu snadno určit, kolik stěn bude mít jeho nakreslení. Tomuto vztahu se říká Eulerova formule.

Věta. (Eulerova formule) *Označme F množinu stěn rovinného nakreslení souvislého rovinného grafu $G = (V, E)$, potom platí*

$$|V| + |F| = |E| + 2.$$

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle počtu hran. Základ indukce je $|E| = |V| - 1$, pro menší počet hran by graf nebyl souvislý. Pokud má graf tento počet hran a je souvislý, nemá kružnice neboli je to strom. Tudíž jeho rovinné nakreslení má jen jednu stěnu a tvrzení platí. Nyní předpokládejme, že náš graf má více než $|V| - 1$ hran a že tvrzení platí pro všechny grafy, které mají méně než $|E|$ hran. Zafixujme si nějaké rovinné nakreslení našeho grafu. Víme, že musí obsahovat kružnici. Pokud odebereme jednu z hran této kružnice, graf zůstane souvislý a zmenší se o jedna počet jeho hran. Také se ale „sloučí“ dvě různé stěny nějakého rovinného nakreslení, tedy se o jedna zmenší i počet stěn nakreslení. Odebráním hrany jsme nepřidali žádné průsečíky hran, tedy i nakreslení takto zmenšeného grafu je rovinné. Pro tento zmenšený graf a jeho nakreslení rovnost platí z indukce, musí tudíž platit i pro původní graf.



□

Cvičení 7. Jak by vypadala Eulerova formule pro rovinný graf s k komponentami souvislosti?

Tvrzení. *Pro rovinný graf $G = (V, E)$ platí $3|V| - 6 \geq |E|$.*

Důkaz. Uvažme nějaké rovinné nakreslení G a označme množinu jeho stěn F. Eulerova formule nám říká, že platí $|V| + |F| = |E| + 2$. Nyní použijeme počítání dvěma způsoby. Spočítáme dvojice (stěna, hrana na její hranici). Každá hrana náleží jedné nebo dvěma stěnám, počet dvojic je tedy nejvýše $2|E|$. Zároveň každá stěna má alespoň tři hrany, tudíž počet těchto dvojic je alespoň $3|F|$. Dohromady dostáváme $|F| \leq \frac{2}{3}|E|$. Dosadíme do Eulerovy formule:

$$|V| + \frac{2}{3}|E| \geq |V| + |F| = |E| + 2.$$

Úpravou dostáváme požadované tvrzení. □

Cvičení 8. Dokaž, že grafy K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

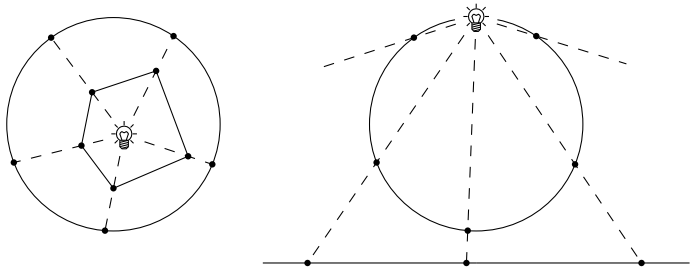
Ještě než se Eulerova formule dokázala pro obecné rovinné grafy, byla objevena pro konvexní mnohostěny.

Věta. (Eulerova formule pro mnohostěny) *Označme množiny vrcholů, hran a stěn konvexního mnohostěnu postupně V, E a F. Pak platí*

$$|V| + |F| = |E| + 2.$$

Důkaz. Ukážeme, že Eulerova formule pro mnohostěny je jenom speciálním případem Eulerovy formule pro rovinné grafy. To uděláme tak, že pro každý konvexní mnohostěn najdeme odpovídající rovinný graf se stejným počtem hran, vrcholů a stěn.

Abychom ukázali, že konvexní mnohostěn nám dává rovinný graf, prostě najdeme nějaké jeho rovinné nakreslení. Abychom nemuseli řešit, že je mnohostěn nějak placatý nebo šišatý, promítneme ho nejprve na sféru. Zvolíme si tedy libovolnou sféru takovou, že je celý mnohostěn uvnitř ní. Dále si zvolíme libovolný bod uvnitř mnohostěnu a z něj budeme promítat na sféru. Můžeš si to představit tak, že do bodu uvnitř mnohostěnu umístíme žárovku a na sféře se objeví stín. Tím se vrcholy zobrazí na body a hrany se zobrazí na kružnicové oblouky. Protože mnohostěn byl konvexní, obrazy žádných dvou hran se nebudou protínat. Dále vezmeme nějaký bod X na sféře, na který se nezobrazil žádný vrchol ani hrana mnohostěnu. Z bodu X uděláme takzvanou stereografickou projekci do roviny. To znamená, že vezmeme rovinu neprotínající sféru, aby byl X ze všech bodů na sféře od ní nejdál. Potom prostě uděláme projekci z X na tuto rovinu. Zase si můžeš představit, že jsme do bodu X umístili žárovku. Protože se hrany neprotínaly na sféře, nebudou se protínat ani po stereografické projekci, a dostali jsme tím pádem rovinné nakreslení se správným počtem hran, vrcholů a stěn.



□

Možná Tě trochu zarazilo, že pracujeme s mnohostěny, aniž bychom je pořádně definovali. To lze udělat více způsoby, například jako konvexní obal konečné množiny konvexně nezávislých bodů V, tj. žádný bod z množiny V nesmí jít vyjádřit jako konvexní kombinace ostatních. Navíc budeme požadovat, aby celý mnohostěn neležel v jedné rovině, tedy aby to nebyl mnohoúhelník umístěný do prostoru. Bodům množiny V potom říkáme vrcholy daného mnohostěnu. Můžeš si všimnout, že díky podmínce na konvexní nezávislost žádný vrchol nemůže být uprostřed stěny ani hrany.

Definovat nekonvexní mnohostěn už je trochu oříšek, proto to dělat nebudeme. Poznamenejme ale, že Eulerova formule platí i pro ně, avšak jenom pokud „nemají díry“.

Cvičení 9. Rozmysli si na nějakém konkrétním mnohostěnu s dírou, že pro něj Eulerova formule skutečně neplatí.

Úloha 1. Může existovat konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou šestiúhelníky?

Úloha 2. Dokaž, že každý mnohostěn, který nemá žádné čtyřúhelníkové ani pětiúhelníkové stěny, musí mít aspoň čtyři trojúhelníkové stěny.

Zajímavostí je, že kdybychom nechtěli, aby byl mnohostěn konvexní, a dokonce dovolili, aby v něm byly díry, nebude předchozí úloha platit. Známým protipříkladem je takzvaný *Szilassiho sedmistěn*[5].

Průsečíkové číslo

Definice. Mějme nějaké nakreslení grafu G, *průsečíkové číslo* tohoto nakreslení definujeme jako počet průsečíků křivek odpovídajících jeho hranám. Když se k křivek protíná v jednom bodě, počítáme to jako $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ průsečíků, jeden za každou dvojici protínajících se křivek.

Definice. *Průsečíkové číslo* grafu G definujeme jako minimum z průsečíkových čísel všech jeho nakreslení. Značíme jej $\mathrm{cr}(G)$.

Z definice platí $\mathrm{cr}(G) = 0$ právě pro rovinné grafy. Ve Cvičení 6 jsme ukázali, že $\mathrm{cr}(K_{3,3}) \leq 1$ a $\mathrm{cr}(K_5) \leq 1$, a ve Cvičení 8 zase $\mathrm{cr}(K_{3,3}) \geq 1$ a $\mathrm{cr}(K_5) \geq 1$. Než se podíváme na hlavní tvrzení o průsečíkovém čísle, dokážeme si jednoduché lemma.

Lemma. *Pro graf $G = (V, E)$ platí*

$$\mathrm{cr}(G) > |E| - 3|V|. \tag{1}$$

Důkaz. Uvažme nakreslení grafu G s právě $\mathrm{cr}(G)$ průsečíky. Z každé dvojice protínajících se hran můžeme vybrat jednu a odstranit ji. Odstraníme maximálně $\mathrm{cr}(G)$ hran a získáme tak rovinný graf.

[5] Jak přesně vypadá můžeš najít třeba tady: *https://en.wikipedia.org/wiki/Szilassi_polyhedron*.

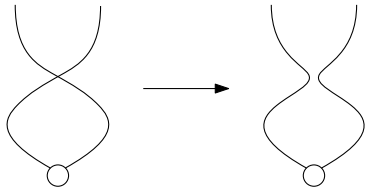
Z tvrzení v předchozí části víme, že počet hran rovinného grafu je méně než trojnásobek počtu jeho vrcholů, což nám dává dokazovanou nerovnost. □

Věta. (O průsečíkovém čísle) *Pro graf $G = (V, E)$ platí*

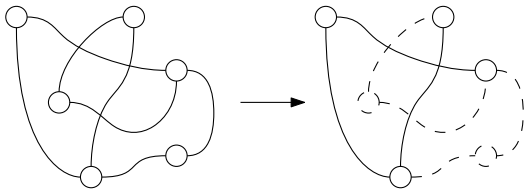
$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2} - |V|.$$

Důkaz této věty bude využívat pravděpodobnostní metodu. Konkrétně budeme potřebovat střední hodnotu. Pokud jsi ji nikdy nepotkal(a), může tato pasáž být trochu náročnější, ale neměla by být nějak důležitá pro pochopení zbytku seriálu ani k vyřešení žádné ze sériových úloh. *Střední hodnota* výrazu X (který závisí na náhodě) se značí $\mathbb{E}[X]$ a v podstatě říká, jaká je jeho průměrná hodnota. Například hodíme-li klasickou šestistěnnou kostkou a označíme S číslo, které padlo, jeho střední hodnota bude $\mathbb{E}[S] = 3.5$.

V následujícím důkazu budeme předpokládat, že se žádné dvě hrany sdílející vrchol neprotínají. Kdyby se protínaly, můžeme nakreslení upravit jako na obrázku a průsečíkové číslo nakreslení by se tím akorát snížilo.



Důkaz. Uvažme nakreslení grafu G. Můžeme předpokládat, že $|E| \geq 4|V|$, jinak je tvrzení triviální. Nyní si zvolíme pravděpodobnost $0 < p \leq 1$, její přesnou hodnotu určíme až na konci. Z množiny vrcholů V vybereme podmnožinu V'. Každý vrchol $v \in V$ přidáme do V' s pravděpodobností p, všechny vrcholy přidáme nezávisle na sobě. Vybraná množina vrcholů nám dává nějakou podmnožinu hran $E' \subseteq E$, hrana (u, v) bude v E' právě tehdy, když oba její koncové vrcholy leží v V', tedy $u, v \in V'$. To nám dává nějaký nový graf $G' = (V', E')$.



Každá hrana se dostala do E' s pravděpodobností p^2. Z linearity střední hodnoty platí $\mathbb{E}[|V'|] = p|V|$, $\mathbb{E}[|E'|] = p^2|E|$. [6] Původní nakreslení grafu G nám určuje nakreslení zmenšeného grafu G'. Označme x počet průsečíků původního nakreslení grafu G a x' počet průsečíků nakreslení G'. Platí $\mathbb{E}[x'] = p^4 x$, protože průsečík bude v novém nakreslení právě tehdy, když v něm budou obě příslušné hrany a ty jsou na sobě nezávislé (proto jsme nechtěli, aby se protínaly hrany sdílející koncový vrchol). Podle nerovnosti (1) platí $x' \geq |E'| - 3|V'|$. Tato nerovnost nám dává analogickou

[6] Tím jsme jenom formálně řekli, že v novém grafu bude v průměru $p|V|$ vrcholů a $p^2|E|$ hran, což by mělo být intuitivně jasné.

nerovnost pro střední hodnoty. Intuitivně řečeno, když nerovnost platí ve všech případech, musí platí i v průměru. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x'] &\geq \mathbb{E}[|E'|] - 3\,\mathbb{E}[|V'|],\\ p^4 x &\geq p^2|E| - 3p|V|,\\ x &\geq \frac{p|E| - 3|V|}{p^3}.\end{aligned}$$

Teď si můžeme zvolit pravděpodobnost p. Ukazuje se, že správnou volbou je $p = \frac{4|V|}{|E|}$. To je číslo z intervalu $(0, 1\rangle$, protože jsme předpokládali $|E| \geq 4|V|$. Dosazením do nerovnosti výše je důkaz hotov. □

Tento důkaz byl dost trikový – náhodně jsme vybrali podmnožinu vrcholů a za pomoci vztahu (1) jsme potom dokázali nerovnost. Pokud jsi ještě nikdy nic takového neviděl(a), může to vypadat trochu jako podvod – nedokázali jsme jenom, že to tvrzení platí s nějakou pravděpodobností? Ne, tohle je skutečně validní důkaz a tvrzení podle něj platí vždy. Kdybys chtěl(a) vidět víc podobných důkazů a dozvědět se něco víc o pravděpodobnosti, můžeš si přečíst seriál o pravděpodobnosti z 38. ročníku.[7]

Asymptotická notace

Zase na chvíli odbočíme od geometrie a vysvětlíme si asymptotickou notaci. Asymptotická notace se hodí k popisu toho, jak rychle něco roste. V podstatě nám umožňuje formálněji říct tvrzení stylu „Funkce f roste nejvýše tak rychle jako funkce g.“ Nezajímá nás, jak se funkce chová pro malé argumenty, rozhodující pro nás bude chování pro velké hodnoty. Proč bychom chtěli něco takového říkat? Často je docela jedno, jestli je něčeho $3n^2$ nebo $\frac{1}{4}n^2 + n$, a konstanty nám jenom překáží. Teď už se ale vrhněme na formální definici.

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ jsou funkce z přirozených do kladných reálných čísel. Píšeme $f \in \mathcal{O}(g)$, jestliže

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq N : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Výraz $f \in \mathcal{O}(g)$ zpravidla čteme „f je (velké) Ó g“.

Několik kvantifikátorů za sebou může na první pohled vypadat trochu děsivě, ale vlastně říkají něco hrozně jednoduchého. Znamená to, že pro všechna n, která jsou dostatečně velká, je $f(n)$ maximálně konstanta krát $g(n)$. Výraz $\mathcal{O}(g)$ potom můžeme chápat jako třídu[8] funkcí, které nerostou rychleji než g. Výrazem $f \in \mathcal{O}(g)$ potom říkáme, že f patří do třídy funkcí rostoucích nejvýše tak rychle jako g.

Do třídy $\mathcal{O}(n^2)$ patří například funkce $4n + 3$, $n^{3/2}$ nebo $2n^2$. Naopak do ní nepatří n^3 nebo 2^n. Velké O se navíc chová hezky vzhledem ke sčítání a násobení konstantou.

Tvrzení. *Jestliže $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$, potom i $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(g)$.*

Tvrzení. *Jestliže $f \in \mathcal{O}(g)$ a $c \in \mathbb{R}^+$, potom i $c \cdot f \in \mathcal{O}(g)$.*

Cvičení 10. Dokaž předchozí dvě tvrzení.

Příklad. Maximální počet rovnostranných trojúhelníků tvořených n body v rovině je $\mathcal{O}(n^2)$.

Řešení. Nejprve si formálně zapišme, co po nás zadání chce. Označme $f(n)$ maximální možný počet rovnostranných trojúhelníků na n bodech v rovně. Máme tedy funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ a chceme

[7] Seriál najdeš na adrese *https://prase.cz/archive/38/serial.pdf*.

[8] *Třída* je jenom trochu lepší množina.

dokázat $f \in \mathcal{O}(n^2)$. Počet všech trojic tvořených n body je $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, a tedy $f(n) \leq \frac{1}{6}n^3$. To nám ale dává jenom $f \in \mathcal{O}(n^3)$, musíme udělat něco chytřejšího.

Uvažme libovolnou dvojici bodů, těch je $\binom{n}{2} \in \mathcal{O}(n^2)$. Pro každou takovou dvojici potom existují nejvýše dva body, které s ní tvoří rovnostranný trojúhelník. Dvojnásobek počtu dvojic bodů je určitě také v $\mathcal{O}(n^2)$. Nějaké trojúhelníky jsme takto mohli započítat dvakrát, ale to nevadí, dokázali jsme $f \in \mathcal{O}(n^2)$.

Poznamenejme ještě, že tento odhad je velmi slabý, ke konci tohoto dílu si ukážeme mnohem silnější odhady.

Co kdybychom ale chtěli říct, že nějaká funkce naopak roste aspoň tak rychle jako jiná? K tomu slouží následující notace.

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ jsou funkce z přirozených do kladných reálných čísel. Píšeme $f \in \Omega(g)$, jestliže

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq N : f(n) \geq c \cdot g(n).$$

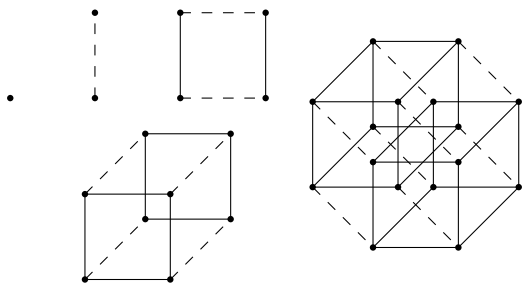
Výraz $f \in \Omega(g)$ zpravidla čteme „f je (velká) omega g“.

Definice Ω je naprosto analogická definici $\mathcal{O}$, jenom jsme změnili znaménko nerovnosti.

Příklad. Dokaž, že maximální počet dvojic bodů s jednotkovou vzdáleností je $\Omega(n \log n)$.[9]

Řešení. Nejprve si ujasněme, jak něco takového dokázat. Bude nám stačit najít posloupnost množin bodů v rovině $S_1, S_2, \ldots$ takových, že $|S_n| = n$, a označíme-li $f(n)$ počet jednotkových vzdáleností v S_n, platí $f \in \Omega(n \log n)$.

Nejprve zkonstruujeme množiny o velikostech mocniny dvou. Množina S_1 bude dána jedním bodem. Množina S_{2^k} potom vznikne z množiny $S_{2^{k-1}}$ tak, že množinu $S_{2^{k-1}}$ duplikujeme a posuneme libovolným směrem o vzdálenost 1. Musíme být trochu opatrní, aby nám přitom nějaké body nesplynuly. Naštěstí máme na výběr nekonečně mnoho směrů a jenom v konečně mnoha z nich nějaké body splynou. Nyní se podívejme na počet takto vytvořených jednotkových vzdáleností. Zjevně platí $f(1) = 0$ a $f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 2^{k-1}$. Je snadné dokázat, že řešením této rekurence je $f(2^k) = 2^{k-1}k$. Pro $n = 2^k$ tedy dostáváme $f(n) = \frac{1}{2}n \log n$. Teď nám zbývá dořešit, co udělat s n, která nejsou mocninami dvou. Prostě najdeme libovolnou mocninu dvou menší rovnou n, uděláme konstrukci pro ni a zbylé body tam naházíme libovolně. To nám dá $f(n) \geq \frac{1}{2}n' \log n'$, kde n' je největší mocnina dvou nepřevyšující n, zjevně platí $n' \geq \frac{n}{2}$. Jednoduchou úpravou dostaneme $f(n) \geq \frac{1}{4}n(\log(n) - 1)$. To je pro dostatečně velké n určitě aspoň $\frac{1}{8}n \log n$, takže $f \in \Omega(n \log n)$ a jsme hotovi. Můžeš si všimnout, že jsme během konstrukce vlastně kreslili hyperkrychli do roviny.



Tohle není nejlepší známý odhad, lze dokonce použít $\Omega\left(n^{1+\frac{c}{\log\log n}}\right)$ pro jistou kladnou reálnou konstantu c. Konstrukce je opět poměrně jednoduchá – body se jenom dají do čtvercové mřížky o vhodných rozměrech. Důkaz ale vyžaduje netriviální znalosti teorie čísel. Proč funkce

[9] Symbolem log zde značíme dvojkový logaritmus. Na základu logaritmu tady ovšem moc nezáleží, protože všechny logaritmy se liší jenom multiplikativní konstantou.

z $\Omega\left(n^{1+\frac{c}{\log\log n}}\right)$ už nutně je i v $\Omega(n\log n)$, nemusí být na první pohled jasné. Důkaz je poněkud technický a není z pohledu kombinatorické geometrie nijak zajímavý, takže ho tu neuvádíme.

Úloha 3. Dokaž, že maximální počet jednotkových vzdáleností mezi n body v $\mathbb{R}^4$ je $\Omega(n^2)$.

Asymptotickou notaci můžeme definovat i pro více proměnných. Definice je velmi podobná té pro jednu proměnnou.

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}^+$, píšeme $f \in \mathcal{O}(g)$, jestliže existují $N \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pokud je aspoň jedno z $n_1, \ldots, n_k$ větší rovno N, tak

$$f(n_1, \ldots, n_k) \leq c \cdot g(n_1, \ldots, n_k).$$

Upozorňujeme, že v některých kontextech může být požadováno, aby $n_i \geq N$ platilo pro všechna i, a ne jen pro jedno. Většinou by na tom ale nemělo záležet.

Incidence a Szemerédi–Trotter

V této sekci se budeme zabývat body a přímkami v rovině. Budeme přitom počítat, kolikrát se stane, že nějaký bod leží na nějaké přímce.

Definice. Nechť je dána množina bodů P a množina přímek L v rovině. *Incidencí* rozumíme uspořádanou dvojici (p, l) takovou, že $p \in P$, $l \in L$ a $p \in l$. Výrazem $I(P, L)$ budeme rozumět počet incidencí tvořených body z P a přímkami z L. Pro přirozené n a m označme $I(n, m)$ maximum $I(P, L)$ přes všechny možné konfigurace P a L splňující $|P| = n$ a $|L| = m$.

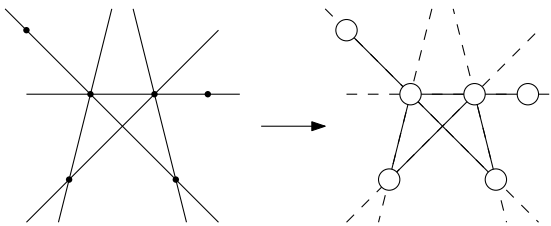
Szemerédiho–Trotterova věta nám dává těsný odhad na počet incidencí, a jak si za chvíli ukážeme, dovolí nám odhadnout i spoustu dalších věcí.

Věta. (Szemerédi–Trotter) *Platí*

$$I(n, m) \in \mathcal{O}(n^{2/3}m^{2/3} + n + m).$$

To může na první pohled vypadat jako poněkud divoký výraz. Speciálně pro $m = n$ se tvrzení zjednoduší na $I(n, n) \in \mathcal{O}(n^{4/3})$.

Důkaz. Mějme množinu bodů $|P| = n$ a množinu přímek $|L| = m$. Definujeme graf $G = (P, E)$, jehož vrcholy jsou body množiny P, které jsou spojené hranou právě tehdy, když jsou na jedné přímce $l \in L$, a navíc mezi nimi na l neleží žádný další bod z P. Konfigurace bodů a přímek v rovině nám zároveň dává nakreslení grafu G.



Graf G má $|P| = n$ vrcholů, kolik má ale hran? Jestliže na přímce l leží $k \geq 1$ bodů, vznikne na ní $k - 1$ hran. To znamená, že skoro každá incidence nám přidá hranu, můžeme tedy odhadnout $I(n, m) \leq |E| + m$. A jaké bude průsečíkové číslo našeho nakreslení G? Hrany G leží na m různých

přímkách, proto mohou mít nejvýše $\binom{m}{2}$ průsečíků, takže $\mathrm{cr}(G) \leq \binom{m}{2}$. Na druhou stranu známe dolní odhad na průsečíkové číslo grafu, to nám dává nerovnost

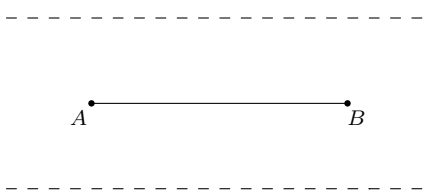
$$\frac{1}{64}\frac{|E|^3}{n^2} - n \leq \mathrm{cr}(G) \leq \binom{m}{2}.$$

V kombinaci s $I(n,m) \leq |E| + m$ jednoduchou úpravou zjistíme $I(n,m) \in \mathcal{O}(n^{2/3}m^{2/3} + n + m)$, čímž je důkaz hotov. □

Příklad. Dokaž, že maximální počet trojúhelníků o obsahu 1 s vrcholy v n bodech je $\mathcal{O}(n^{7/3})$.

Řešení. Zvolme si jeden z n bodů a ukažme, že je součástí $\mathcal{O}(n^{4/3})$ trojúhelníků o obsahu 1. Označme si náš vybraný bod A.

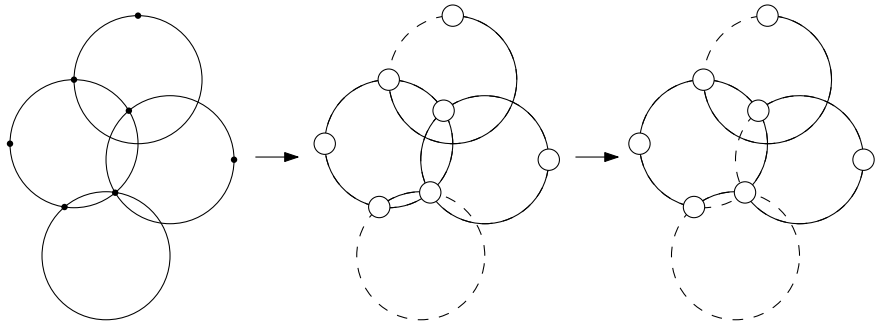
Nyní si zvolme nějaký další bod, označme jej B. Kde může ležet bod C, aby měl trojúhelník ABC obsah 1? Odpovědí je, že musí ležet někde na dvou pevných přímkách rovnoběžných s AB, protože výška tohoto trojúhelníku je pevně daná. Máme $n-1$ možností, jak zvolit bod B, to nám dává $2n-2$ přímek. Pozor na to, že některé dvojice přímek mohly splynout. To se stalo právě tehdy, když nějaké dva body B_1 a B_2 ležely na jedné přímce s A a zároveň od A byly stejně daleko. Nikdy se ale nestane, že by splynuly tři nebo více přímek. Každý bod ležící na nějaké z těchto přímek nám přidá maximálně dva trojúhelníky (dva v případě, že daná přímka je dvojitá). Stačí nám tedy spočítat počet incidencí nejvýše $2n-2$ přímek a $n-1$ bodů. Maximální počet těchto incidencí je ale podle Szemerédiho–Trotterovy věty $\mathcal{O}(n^{4/3})$, čímž je důkaz hotov.



Příklad. Dokaž, že maximální počet jednotkových vzdáleností mezi n body je $\mathcal{O}(n^{4/3})$.

Řešení. Tentokrát nepoužijeme Szemerédiho–Trotterovu větu přímo, ale modifikujeme její důkaz. Okolo každého bodu nakreslíme kružnici o poloměru 1. Mezi dvěma body je vzdálenost 1 právě tehdy, když každý z nich leží na kružnici o poloměru 1 se středem v tom druhém. Stačí nám tedy odhadnout počet incidencí n bodů a n kružnic.

Můžeme udělat obecnější odhad pro n bodů a m kružnic o jednotkovém poloměru. Zase nakreslíme graf G, který má jako vrcholy body naší množiny, a dva body jsou spojené hranou, pokud spolu sousedí na kružnici. Potíž je, že dva body mohou sousedit na dvou kružnicích. Kdyby mezi dvěma vrcholy vedly dvě hrany, libovolnou z nich odstraníme. Kvůli odstraňování hran dostaneme trochu slabší odhad než předtím, ale to nevadí, konstanty nás nezajímají. Dostáváme $I(n,m) \leq 2|E| + 2m$. Náš odhad na $\mathrm{cr}(G)$ teď také bude trochu slabší, protože dvě kružnice se mohou protínat až ve dvou různých bodech, platí $\mathrm{cr}(G) \leq 2\binom{m}{2}$. Konec důkazu je úplně stejný jako v případě Szemerédiho–Trotterovy věty.



Teď už umíme maximální počet jednotkových vzdáleností mezi n body odhadnout zdola i shora. Jenže naše odhady jsou dost daleko od sebe, tak který je ten správný? Problém už několik desítek let zůstává otevřený a pořád se neví, jaká je správná hodnota.

Úloha 4. Nechť S je n-prvková množina bodů v rovině a označme $D = \{|x - y| \mid x, y \in S\}$, tedy množinu všech vzdáleností mezi dvojicí bodů z S. Velikost D udává počet různých vzdáleností tvořených body z S. Dokaž, že minimální počet těchto různých vzdáleností tvořených n body je $\Omega(n^{2/3})$.

Závěr

Dospěli jsme ke konci našeho putování kombinatorickou geometrií. Doufáme, že Tě to s námi bavilo. Pokud ano, máme pro tebe dobrou zprávu – zdaleka jsme nestihli vyčerpat všechna témata, která kombinatorická geometrie nabízí. Pokud by ses chtěl(a) dozvědět víc, můžeš se podívat třeba do následujících skript: *https://kam.mff.cuni.cz/~matousek/kvg1-tb.pdf*.

Rádi bychom poděkovali všem, kteří pomáhali seriálu vzniknout, a to především Hedvice a Matějovi.

Majda a Pepa

Návody ke cvičením

2. Podívej se na definici.

3. Znovu se podívej na definici.

4. Kolik je $\frac{|X|}{|X|}$?

5. Jak to je pro malá d, pro něž si to ještě umíš představit?

6. Stačí některé hrany nakreslit „okolo“ zbytku grafu místo skrz něj.

7. Kolik nejméně hran je třeba přidat, aby se z grafu stal souvislý graf?

8. Pro K_5 použij tvrzení, pro $K_{3,3}$ ho zlepši.

9. Začni s nějakým hezkým mnohostěnem a zkus z něj něco odřezat.

10. Rozepiš si definice, pak by to mělo být jasné.

Návody k úlohám

1. Spočítej dvojice (stěna, hrana na její hranici) a (vrchol, hrana z něj vycházející).

2. Tato úloha je velmi podobná předchozí.

3. Zkus body rozdělit do dvou skupinek tak, aby vzdálenost libovolných dvou bodů z různých skupinek byla 1.

4. Použij odhad na počet jednotkových vzdáleností.

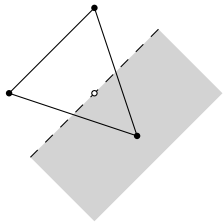
Řesení cvičení

2. 1-středobod mají pouze jednoprvkové množiny (a prázdná množina).

3. Jedná se o celý prostor.

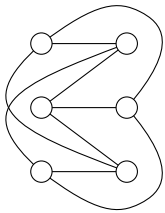
4. Je to konvexní obal X. Libovolná přímka procházející konvexním obalem totiž odřízne aspoň jeden bod. Analogie tohoto platí i ve vyšších dimenzích – množinou $\frac{1}{|X|}$-středobodů je taky konvexní obal.

5. Protipříkladem je třeba $d+1$ afinně nezávislých bodů. V rovině by to byly vrcholy trojúhelníku a v prostoru vrcholy čtyřstěnu. Rozeberme důkaz pro čtyřstěn: Žádný bod vně čtyřstěnu určitě nemůže být α-středobod pro žádné $\alpha > 0$. Zvolme libovolný bod uvnitř nebo na hranici čtyřstěnu a uvažme rovinu procházející tímto bodem rovnoběžnou se stěnou čtyřstěnu, ve které tento bod neleží. Na jedné straně od této roviny je zjevně jenom jeden vrchol, takže náš bod nemůže být α-středobod pro žádné $\alpha > \frac{1}{d+1}$. Na obrázku je naznačena situace v dvou dimenzích.

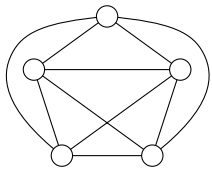


Ve vyšších dimenzích bychom to mohli dokázat úplně stejně, jenom na to nemáme patřičný aparát. Také by stačilo zvolit nadrovinu rovnoběžnou s nějakou stěnou vícerozměrného simplexu[10].

6.



$K_{3,3}$



K_5

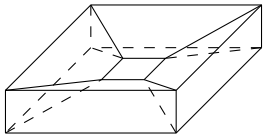
7. $|V| + |F| = |E| + k + 1$.

8. Pro K_5 stačí použít tvrzení o počtu hran a vrcholů rovinného grafu. Má totiž 5 vrcholů a $\binom{5}{2} = 10$ hran, tedy $3|V| - 6 = 9 < 10 = |E|$. Tudíž tvrzení nesplňuje a nemůže být rovinný.

[10] Simplex je zobecnění čtyřstěnu do více dimenzí. Je to mnohostěn, který má $d + 1$ afinně nezávislých vrcholů.

Pro $K_{3,3}$ musíme tvrzení trochu vylepšit. Protože to je bipartitní graf, neobsahuje cykly liché délky. Každá stěna jeho případného rovinného nakreslení by tudíž musela mít alespoň čtyři hrany. Dostáváme $|V| + \frac{2}{4}|E| \geq |V| + |F| = |E| + 2$, z čehož získáme nerovnost $2|V| - 4 \geq |E|$. Ovšem pro $K_{3,3}$ platí $|V| = 6$ a $|E| = 9$, tedy nemůže být rovinný.

9. Funguje třeba mnohostěn, který vznikne následujícím způsobem. Vezmeme kvádr a na dvě jeho protější stěny postavíme směrem dovnitř komolé čtyřboké jehlany, které budou sdílet menší podstavu. Tyto dva jehlany odebereme, jejich menší podstava bude ona kýžená díra. Tento mnohostěn má dvanáct vrcholů, dvanáct stěn, ale dvacet čtyři hran.



10. Z definice existuje N_1 a c_1 takové, že pro každé $n \geq N_1$ platí $f_1(n) \leq c_1 g(n)$. Obdobně existuje N_2 a c_2 pro f_2. Pro funkci $f_1 + f_2$ stačí vzít jako N větší z čísel N_1 a N_2 a jako c vzít $c_1 + c_2$.

Pro druhé tvrzení vezmeme pro $c \cdot f$ stejné N jako pro f, konstantu vynásobíme c.

Řesení úloh

1. Víme, že mnohostěn je vlastně rovinný graf a musí proto splňovat Eulerovu formuli. Kdyby všechny jeho stěny byly šestiúhelníky, počítáním dvojic (stěna, jí náležící hrana) dvěma způsoby zjistíme, že $|F| = \frac{1}{3}|E|$. Dosazením a úpravou Eulerovy formule dostaneme $|V| = \frac{2}{3}|E| + 2$. Protože pracujeme s konvexním mnohostěnem, z každého vrcholu musí vycházet alespoň tři hrany. Tedy spočítáme-li dvěma způsoby počet dvojic (vrchol, hrana, z něj vycházející), dostaneme $|V| \leq \frac{2}{3}|E|$. Avšak z Eulerovy formule plyne opačná nerovnost, což je spor.

2. Opět použijeme, že mnohostěn musí splňovat Eulerovu formuli a že z každého vrcholu vychází alespoň tři hrany, tedy $|V| \leq \frac{2}{3}|E|$. Pro spor předpokládejme, že mnohostěn má nejvýše tři trojúhelníkové stěny. Počítáním dvěma způsoby dostaneme $6|F| - 3 \cdot 3 \geq 2|E|$, což upravíme na $|F| \geq \frac{1}{3}|E| + \frac{1}{2}$. Dosazením do Eulerovy formule dostáváme $|V| + \frac{1}{3}|E| + \frac{1}{2} \geq |E| + 2$. To nám po úpravě dá $|V| \geq \frac{2}{3}|E| + \frac{3}{2}$, z čehož plyne $|V| > \frac{2}{3}|E|$. To je ve sporu s nerovností výše.

3. Naše body rozdělíme rozdělíme do skupinek velikosti přibližně $\frac{n}{2}$. Body první skupinky budou mít souřadnice $(x, y, 0, 0)$, kde $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Body druhé skupinky budou mít analogicky souřadnice $(0, 0, z, w)$, kde $z^2 + w^2 = \frac{1}{2}$. Vzdálenost libovolných dvou bodů $(x, y, 0, 0)$ a $(0, 0, z, w)$ z různých skupinek potom bude podle Pythagorovy věty $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Tím jsme hotovi, protože počet dvojic z různých skupinek je $\Omega(n^2)$. Ještě si můžeme rozmyslet, jak naše množina bodů vlastně vypadá. Obě skupinky jsme rozmístili na kružnice se středem v počátku o poloměru $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tyto kružnice jsou na sebe navíc „hodně kolmé“, leží totiž v rovinách, které se protínají v právě jednom bodě.

4. Odhad na jednotkové vzdálenosti nám říká, že ať si zvolíme libovolné d, maximálně $\mathcal{O}(n^{4/3})$ různých párů bodů z S bude mít vzdálenost d. Celkový počet dvojic je ale $\binom{n}{2} \in \Omega(n^2)$. Máme tedy dolní odhad na počet dvojic a horní odhad na počet dvojic ve stejné vzdálenosti, jejich podíl nám dává dolní odhad na počet různých vzdáleností, a to $\Omega\left(\frac{n^2}{n^{4/3}}\right) = \Omega(n^{2/3})$. Kdybys nám nevěřil(a), že s asymptotickou notací můžeme dělat tyhle úpravy, můžeš si to rozepsat z definice.