Kombinatorická geometrie 3

3. seriálová série | Termín odeslání: 3. dubna 2023

Úloha 1. (5 bodů)

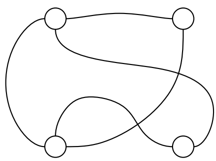
Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo k a množina $2k$ bodů v rovině, pro kterou neexistuje $\frac{1}{2}$-středobod.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme graf $G = (V, E)$ a jeho nakreslení. Pro libovolnou hranu $e \in E$ označme $\mathrm{cr}(e)$ počet hran, které e v daném nakreslení protíná. Dokažte, že

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} \leq 3|V| - 6.$$

Příklad této nerovnosti ukazuje následující obrázek:



$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq 6$$

Úloha 3. (5 bodů)

Pro množinu bodů S v rovině označme $\Delta(S)$ počet nedegenerovaných trojúhelníků s vrcholy z množiny S a obvodem 1. Dále označme $\Delta_{\max}(n)$ maximální hodnotu $\Delta(S)$ přes všechny možné n-prvkové množiny S. Dokažte, že $\Delta_{\max} \in \mathcal{O}(n^{7/3})$.

Kombinatorická geometrie 3

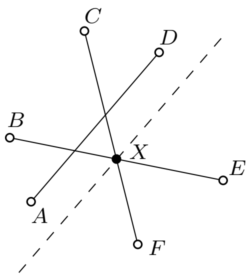
3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo k a množina $2k$ bodů v rovině, pro kterou neexistuje $\frac{1}{2}$-středobod. *(Josef Minařík)*

ŘEŠENÍ:
Ukážeme, že pro $k = 3$ nemusí $\frac{1}{2}$-středobod existovat.

Uvažme body A, B, C, D, E, F, které v tomto pořadí tvoří vrcholy konvexního šestiúhelníku. Předpokládejme, že pro tuto množinu existuje $\frac{1}{2}$-středobod, a označme jej X. Bod X určitě musí ležet na přímce AD. Kdyby na ní neležel, můžeme uvážit rovnoběžku s AD procházející X. Na jedné straně od ní by potom ležely dva body a na druhé čtyři, X by tedy nemohl být $\frac{1}{2}$-středobod.



Analogickou úvahou můžeme ukázat, že X musí ležet i na přímkách BE a CF. Co když se ale přímky AD, BE a CF neprotnou v jednom bodě? Pak $\frac{1}{2}$-středobod určitě nemůže existovat. Stačí nám tedy body zvolit tak, aby se přímky neprotly v jednom bodě, což je zřejmě možné.

POZNÁMKY:
Úloha je trochu zákeřná v tom, že pro $k = 1$ i $k = 2$ vždy $\frac{1}{2}$-středobod existuje. Některá řešení se mylně domnívala, že středobod musí být jedním bodem z množiny, což bohužel vedlo na jinou úlohu. Občas bylo strženo pár bodů za nedostatečnou argumentaci. Přestože je to jednodušší úloha, stále nesmíme zapomínat na řádné odůvodnění svých myšlenek. Konstrukcí bylo popsáno hodně.

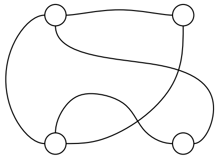
(Josef Minařík)

Úloha 2.

Mějme graf $G = (V, E)$ o alespoň třech vrcholech a jeho nakreslení. Pro libovolnou hranu $e \in E$ označme $cr(e)$ počet hran, které e v daném nakreslení protíná. Dokažte, že

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} \leq 3|V| - 6.$$

Příklad této nerovnosti ukazuje následující obrázek:



$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq 6$

(Josef Minařík)

Řešení:

Budeme postupovat následujícím způsobem. Ukážeme, že při odebrání hrany e s největším nenulovým $\mathrm{cr}(e)$ se levá strana nezmenší. Bude tedy stačit ukázat tvrzení pro rovinné nakreslení grafu, neboť pokud nakreslení není rovinné, můžeme postupně odebírat hrany, dokud nezbude jen rovinné nakreslení. Formálněji, budeme postupovat indukcí podle počtu hran, kde základ indukce jsou všechny rovinné grafy se svými rovinnými nakresleními a při indukčním kroku odebereme a opět přidáme hranu s největším $\mathrm{cr}(e)$.

Pokud je graf rovinný a dostali jsme jeho rovinné nakreslení, tvrzení opravdu platí, neboť potom $\mathrm{cr}(e) = 0$ pro všechny hrany e. Za využití nerovnosti z úvodního textu seriálu tudíž platí

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} = \sum_{e \in E} \frac{1}{1 + 0} = \sum_{e \in E} 1 = |E| \leq 3|V| - 6.$$

Nyní si zafixujme graf G a jeho nakreslení, které není rovinné. Vyberme hranu a s největším $\mathrm{cr}(a)$. Pokud je takových hran více, vybereme libovolnou z nich. Označme A množinu hran, které a protíná. Když hranu a odebereme, zmizí z levé strany nerovnosti $\frac{1}{1+\mathrm{cr}(a)}$, avšak zároveň se $\mathrm{cr}(e)$ pro $e \in A$ zmenší o jedna. Tedy pro $e \in A$ bude nahrazen zlomek $\frac{1}{1+\mathrm{cr}(e)}$ zlomkem $\frac{1}{1+(\mathrm{cr}(e)-1)} = \frac{1}{\mathrm{cr}(e)}$. Potom

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E \setminus \{a\}} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} &= \left(\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} \right) - \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(a)} + \left(\sum_{e \in A} \frac{1}{\mathrm{cr}(e)} - \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} \right) = \\
&= \left(\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} \right) - \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(a)} + \left(\sum_{e \in A} \frac{1}{\mathrm{cr}(e)(1 + \mathrm{cr}(e))} \right) \geq \\
&\geq \left(\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} \right) - \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(a)} + \left(\sum_{e \in A} \frac{1}{\mathrm{cr}(a)(1 + \mathrm{cr}(a))} \right) = \\
&= \left(\sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)} \right) - \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(a)} + \frac{\mathrm{cr}(a)}{\mathrm{cr}(a)(1 + \mathrm{cr}(a))} = \sum_{e \in E} \frac{1}{1 + \mathrm{cr}(e)}.
\end{aligned}$$

Ve druhé úpravě jsme využili toho, že $\mathrm{cr}(a) \geq \mathrm{cr}(e)$ pro všechna $e \in E$. Ve třetí toho, že $|A| = \mathrm{cr}(a)$. Výraz se tedy odebíráním hrany s největším $\mathrm{cr}(e)$ nezmenšuje a důkaz je hotov.

Poznámky:

Všechna kompletní řešení postupovala stejně jako vzorové. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha 3.

Pro množinu bodů S v rovině označme $\Delta(S)$ počet nedegenerovaných trojúhelníků s vrcholy z množiny S a obvodem 1. Dále označme $\Delta_{\max}(n)$ maximální hodnotu $\Delta(S)$ přes všechny možné n-prvkové množiny S. Dokažte, že $\Delta_{\max} \in \mathcal{O}(n^{7/3})$. *(Josef Minařík)*

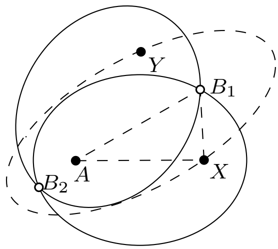
Řešení:

Zvolme si jeden z bodů $A \in S$ a ukažme, že je obsažen v $\mathcal{O}(n^{4/3})$ trojúhelnících o obvodu 1.

Zafixujme si nějaký bod $B \neq A$, $B \in S$, který je od A vzdálený méně než $\frac{1}{2}$. Co musí splňovat bod C, aby měl trojúhelník ABC obvod 1? Musí ležet na elipse s ohnisky A a B a s velkou poloosou $\frac{1}{2}(1-|AB|)$. Máme nejvýše $n-1$ možných voleb bodu B, tedy nejvýše $n-1$ různých elips. Označme jejich počet m. Ukážeme, že počet incidencí těchto m elips a n bodů množiny S je v $\mathcal{O}(n^{4/3})$.

Budeme postupovat podobně jako v odhadu na počet incidencí n bodů a m jednotkových kružnic v seriálu, modifikujeme důkaz Szemerédiho-Trotterovy věty. Uvážíme tedy graf $G = (V, E)$. Jehož vrcholy jsou body množiny S a vede mezi nimi hrana, pokud spolu sousedí na nějaké elipse. Na dokončení důkazu budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení:

- Každé dvě elipsy se protínají nevýše ve čtyřech bodech, tudíž $\mathrm{cr}(G) \leq 4\binom{m}{2}$.
- Libovolná dvojice našich bodů leží nejvýše na čtyřech elipsách. Uvažme body $X, Y \in S$, ležící na elipse, která má jedno z ohnisek v bodě A. Označme druhé ohnisko B. Platí $|AB| + |XB| = 1 - |AX|$, takže B musí ležet na elipse s ohnisky A a X. Analogicky $|AB| + |YB| = 1 - |AY|$, tedy B musí ležet i na elipse s ohnisky A a Y. Tyto dvě elipsy se protínají v nejvýše čtyřech bodech, takže máme jenom 4 možné polohy bodu B.



Jestliže na jedné elipse leží k bodů, dají nám $k-1$ nebo k hran ($k-1$ pokud $k \leq 2$). Každou hranu ale můžeme dostat až čtyřmi různými způsoby. Označíme-li počet incidencí I, dostaneme $|E| \geq \frac{1}{4}(I - m)$, takže $I \leq 4|E| + m$.

Zbytek důkazu je identický s důkazem Szemerédiho-Trotterovy věty. Předchozí dvě tvrzení společně s větou o průsečíkovém čísle dávají $I \in \mathcal{O}(n^{2/3}m^{2/3} + m + n)$, a tedy $I \in \mathcal{O}(n^{4/3})$, čímž je tvrzení dokázáno.

Poznámky:

Úloha nebyla příliš obtížná, ale dost technická. Všechna tři řešení byla správná a velmi podobná tomu vzorovému. Zajímavá otázka je, jak silný je náš odhad. Dokážete najít množinu bodů v rovině s více než $\Omega(n)$ trojúhelníky o obvodu 1? *(Josef Minařík)*