Funkce

3. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. DUBNA 2023

Funkce $f : A \to B$ přiřazuje každému prvku $a \in A$ nějaký prvek $f(a) \in B$.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Klátra, Lenka, Majda a Natka mají každá svoji oblíbenou funkci, která každému z čísel 1, 2, 3, 4 přiřazuje reálné číslo.

- Klátra řekla Lence: „Tož, moje funkce je lepší než ta tvoje! Našla jsem tři různá čísla z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$, ve kterých je moje funkce větší než ta tvoje."
- Na to Lenka odvětila: „To je sice pravda, ale ta moje je ve třech různých číslech větší než ta Majdina".
- Majda se ohradila: „Já by mohla říct to stejné o Natčině funkci."
- Načež Natka prohlásila: „A já tiež o tej Klátrinej."

Mohly mít opravdu všechny dívky pravdu?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Matěj našel funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňuje $f(2023 - x) = f(2023 + x)$. Číslo k nazveme *kořen*, pokud $f(k) = 0$. Matějova funkce má právě 2023 různých reálných kořenů. Určete jejich součet.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Funkce $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ splňuje $f(x) = 1$ pro celočíselná x a $f(x) = 0$ pro x, která nejsou celá. Napište předpis funkce f využívající pouze proměnnou x, celá čísla, operace $+$, $-$, $\cdot$, $/$ (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a funkci dolní celá část[1].

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Pro reálná čísla a a b platí, že oba kvadratické polynomy $x^2 + ax + b$, $x^2 + bx + a$ mají každý dva různé reálné kořeny. Dále má součin těchto polynomů právě tři různé reálné kořeny. Najděte součet těchto tří kořenů.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y).$$

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jež pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2.$$

[1] *Dolní celá část* $\lfloor x \rfloor$ reálného čísla x je největší celé číslo nepřevyšující x.

Úloha 7. (5 bodů)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ splňují rovnost

$$\underbrace{f(f(\cdots f(}_{f(b)\text{-krát}} a)\cdots)) + ab = f(a)f(b).$$

Úloha 8. (5 bodů)

Rozhodněte, zda existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(f(x)) = x^2 - x - 2023$ pro všechna reálná x.

Funkce

3. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1.

Klátra, Lenka, Majda a Natka mají každá svoji oblíbenou funkci, která každému z čísel 1, 2, 3, 4 přiřazuje reálné číslo.

- *Klátra řekla Lence: „Tož, moje funkce je lepší než ta tvoje! Našla jsem tři různá čísla z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$, ve kterých je moje funkce větší než ta tvoje.“*
- *Na to Lenka odvětila: „To je sice pravda, ale ta moje je ve třech různých číslech větší než ta Majdina“.*
- *Majda se ohradila: „Já by mohla říct to stejné o Natčině funkci.“*
- *Načež Natka prohlásila: „A já tiež o tej Klátrinej.“*

Mohly mít opravdu všechny dívky pravdu? *(Josef Minařík)*

Řešení:

Označme Klátřinu, Lenčinu, Majdinu a Natčinu funkci postupně k, ℓ, m, n. Abychom ukázali, že mohly mít všechny dívky pravdu, stačí najít takovou čtveřici funkcí, která splňuje zadání. Uvažme

$$k(1) = 1, \qquad k(2) = 2, \qquad k(3) = 3, \qquad k(4) = 4.$$

Pro Lenčinu funkci pak potřebujeme, aby ve třech různých číslech platilo $k(i) > \ell(i)$. Taková je třeba funkce

$$\ell(1) = 4, \qquad \ell(2) = 1, \qquad \ell(3) = 2, \qquad \ell(4) = 3.$$

Obdobně najdeme

$$m(1) = 3, \qquad m(2) = 4, \qquad m(3) = 1, \qquad m(4) = 2$$

a

$$n(1) = 2, \qquad n(2) = 3, \qquad n(3) = 4, \qquad n(4) = 1.$$

Taková čtveřice funkcí splňuje zadání, a všechna děvčata tak mohla mít pravdu.

Poznámky:

Téměř všechna řešení byla správně a postupovala obdobně, tedy našla konstrukci čtyř funkcí splňujících zadání. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 2.

Matěj našel funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňuje $f(2023 - x) = f(2023 + x)$. Číslo k nazveme kořen, pokud $f(k) = 0$. Matějova funkce má právě 2023 různých reálných kořenů. Určete jejich součet. *(Matěj Gajdoš)*

Řešení:

Začneme, jak se říká, od kořene problému. Představme si, že chytíme do rukou nějaký kořen k, který se rovná $2023 + b$. Umíme pak najít nějaký jiný kořen? Nejspíše ano. Víme, že

$$f(k) = 0.$$

Z toho získáme

$$f(2023 + b) = f(2023 - b) = 0.$$

tedy $2023 - b$ je kořen. Pokud je b nenulové, získali jsme další kořen. Podíváme se nyní na součet obou kořenů. Ten je $(2023 + b) + (2023 - b) = 2 \cdot 2023$. Celkem je 2023 kořenů, tedy jelikož všechny kořeny kromě 2023 mají někoho do páru, získáme 1011 dvojic se součtem $2 \cdot 2023$ a 2023. Což je v součtu 2023^2.

Poznámky:

Řešení úlohy se sešla spousta a drtivá většina z nich byla správná. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 3.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ splňuje $f(x) = 1$ pro celočíselná x a $f(x) = 0$ pro x, která nejsou celá. Napište předpis funkce f využívající pouze proměnnou x, celá čísla, operace $+$, $-$, $\cdot$, $/$ (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a funkci dolní celá část[1]. *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:

Například funkce $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ daná předpisem

$$f(x) = \lfloor \lfloor x \rfloor - x \rfloor + 1$$

splňuje zadané požadavky. Stačí si uvědomit, že výraz $\lfloor x \rfloor - x$ nabývá hodnot v intervalu $(-1, 0\rangle$ pro všechna reálná x. Zejména $\lfloor x \rfloor - x$ je rovno 0 právě tehdy, když x je celočíselné. Pokud je x necelé číslo, pak výraz $\lfloor x \rfloor - x$ nabývá hodnot z intervalu $(-1, 0)$, a tedy dolní celá část $\lfloor \lfloor x \rfloor - x \rfloor$ musí být -1. Tím pádem $\lfloor \lfloor x \rfloor - x \rfloor + 1$ je předpis pro funkci f, která splňuje zadání.

Poznámky:

Většina řešitelů našla podobnou variantu předpisu jako je ve vzorovém řešení. Další možná správná řešení jsou například $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 1$ nebo $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor + 1} \right\rfloor$. Body se strhávaly, jestliže se dalo najít alespoň jedno reálné číslo, pro které předpis nesplňoval zadání, či pro které vůbec nefungoval (např. několikrát se vyskytlo dělení nulou). *(Diana Bergerová)*

[1] *Dolní celá část* $\lfloor x \rfloor$ reálného čísla x je největší celé číslo nepřevyšující x.

Úloha 4.

Pro reálná čísla a a b platí, že oba kvadratické polynomy $x^2 + ax + b$, $x^2 + bx + a$ mají každý dva různé reálné kořeny. Dále má součin těchto polynomů právě tři různé reálné kořeny. Najděte součet těchto tří kořenů. *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:

Ze zadání víme, že součin polynomů (polynom 4. stupně) má právě 3 reálné kořeny. Oba polynomy tedy musejí mít jeden společný kořen (jelikož každý z nich má právě dva různé reálné kořeny). Nazvěme tento společný kořen x_s. Tento kořen musí být i kořenem rozdílu těchto dvou polynomů, z čehož dostáváme

$$0 = x_s^2 + ax_s + b - x_s^2 - bx_s - a = x_s(a - b) - (a - b).$$

Jelikož $a \neq b$ (kdyby $a = b$, oba polynomy budou shodné a jejich součin bude mít maximálně 2 různé kořeny), dostáváme tak $x_s = 1$. Označme druhý kořen prvního polynomu x_1 a druhý kořen druhého polynomu x_2, použijme Viètovy vzorce:

$$\begin{aligned} -a &= x_s + x_1 = 1 + x_1, \\ b &= x_s x_1 = x_1, \\ -b &= x_s + x_2 = 1 + x_1, \\ a &= x_s x_2 = x_2. \end{aligned}$$

Vyjádřeme nyní pomocí 1. a 4. vztahu součet kořenů x_1 a x_2:

$$x_1 + x_2 = -1 - a + a = -1.$$

Z tohoto dostáváme, že součet všech tří kořenů je

$$x_s + x_1 + x_2 = 1 - 1 = 0.$$

Poznámky:

Úlohu měla většina řešitelů správně. Úloha byla většinou řešena použitím Viètových vzorců, jako ve vzorovém řešení, či úpravami výrazů. Jedno správné řešení ovšem používalo vyjádření kořenů pomocí vzorečku s diskriminantem. Bohužel i některá špatná řešení těchto vzorečků využívala. Další chyba, která se ve špatných řešeních objevovala, bylo chybné použití Viètových vzorců. Pro součin polynomů opravdu platí, že součet všech kořenů se rovná $-(a+b)$, ovšem nás zajímal pouze součet tří rozdílných kořenů. Nakonec bych chtěla podotknout že za správný výsledek jsem považovala nejen 0, ale i $1 + a + b$ a $-1 - a - b$. *(Anna Marie Minarovičová)*

Úloha 5.

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y).$$

(Matěj Doležálek)

Řešení:

Úlohu vyřešíme substituční metodou a ukážeme, že jedinými funkcemi, které vyhovují zadání, jsou $f(x) = x + 1$ a $f(x) = -x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Funkce $f(x)$ má splňovat danou funkcionální rovnici pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, tedy platí i pro libovolné x a $y = 0$. Pak

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x)f(0), \\ f(x)(f(0) - 1) &= 0 \end{aligned}$$

neboli $f(0) = 1 \vee f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Platí-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak dostáváme spor, neboť např. pro $x = 2 = y$ máme

$$\begin{aligned} f(4) + 4 &= f(2)^2, \\ 4 &= 0. \end{aligned}$$

Tudíž platí $f(0) = 1$.

Nechť $x = 1$, $y = -1$, potom obdržíme $f(0) - 1 = f(1)f(-1) = 0$. To potom znamená, že $f(1) = 0 \vee f(-1) = 0$.

Za prvé buď $f(1) = 0$. Následně pro dvojici $x = z - 1$, kde $z \in \mathbb{R}$, a $y = 1$ platí

$$\begin{aligned} f(z - 1 + 1) + z - 1 &= f(z - 1)f(1) = 0, \\ f(z) &= 1 - z. \end{aligned}$$

Provedeme zkoušku pro právě nalezenou funkci $f(x) = 1 - x$:

$$\begin{aligned} f(x + y) + xy &= f(x)f(y), \\ (1 - x - y) + xy &= (1 - x)(1 - y), \\ 1 - x - y + xy &= 1 - x - y + xy. \end{aligned}$$

Funkce $f(x) = 1 - x$ tedy vyhovuje zadání.

Za druhé buď $f(-1) = 0$, pak pro dvojici $x = z + 1$, kde $z \in \mathbb{R}$, a $y = -1$ platí

$$\begin{aligned} f(z + 1 - 1) - z - 1 =& f(z + 1)f(-1) = 0, \\ f(z) =& z + 1. \end{aligned}$$

Nalezli jsme druhou funkci $f(x) = x + 1$. Nezapomeňme provést zkoušku:

$$\begin{aligned} f(x + y) + xy &= f(x)f(y), \\ (1 + x + y) + xy &= (1 + x)(1 + y), \\ 1 + x + y + xy &= 1 + x + y + xy. \end{aligned}$$

Jediné funkce vyhovující zadané funkcionální rovnici jsou tedy $f(x) = x + 1$ a $f(x) = 1 - x$.

Poznámky:

Většina došlých řešení postupovala obdobně a byla správně. Mezi časté chyby patřilo opomenutí, že rovnice $f(x) = f(x)f(0)$ má dvě řešení: $f(0) = 1$ a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dále nesmíme zapomenout na zkoušku, která je u substituční metody nutnou podmínkou.

(Denisa Hanušková)

Úloha 6.

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jež pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují

$$f((x-y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2.$$

(Natália Bátorová)

Řešení:
Nejdříve dosadíme $x = y = 0$, tím získáme rovnici $f(0) = f(0)^2$, ze které také plyne, že buď $f(0) = 0$, nebo $f(0) = 1$. Po dosazení $x = 0$ a $y \in \mathbb{R}$ máme $f(y^2) = (f(0))^2 + y^2$ a protože y bylo libovolné reálné číslo, dostáváme pro všechna kladná reálná x nutně funkční předpis $f(x) = x + f(0)$. Dokážeme totéž pro záporná x. Zvolme $x > 0 > y$ a postupně upravme rovnici:

$$\begin{aligned} f((x-y)^2) &= (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2, \\ (x-y)^2 + f(0) &= (x + f(0))^2 - 2xf(y) + y^2, \\ x^2 - 2xy + y^2 + f(0) &= x^2 + 2xf(0) + f(0)^2 - 2xf(y) + y^2, \\ -2xy &= 2xf(0) - 2xf(y), \\ f(y) &= y + f(0). \end{aligned}$$

V posledním kroku jsme vydělili rovnici nenulovým číslem $2x$, což byla ekvivalentní úprava. Tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (pro nulu triviálně) máme nutně funkční předpis $f(x) = x + f(0)$ a spolu s podmínkou $f(0) = (f(0))^2$ dostáváme funkce $f(x) = x$ a $f(x) = x + 1$. Dosazením do rovnice ověříme, že obě tyto funkce rovnici splňují.

Poznámky:
Řešitelé většinou postupovali obdobně nebo využili jiné úpravy, které taky vedli k cíli. Mnozí své řešení však nedotáhli do úplného konce. *(Natália Bátorová)*

Úloha 7.

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ splňují rovnost

$$\underbrace{f(f(\cdots f(}_{f(b)\text{-krát}}a)\cdots)) + ab = f(a)f(b).$$

(Matěj Doležálek)

Řešení:
Dokážeme, že jedinou vyhovující funkcí je $f(n) = n + 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro opakovanou aplikaci funkce budeme používat následující značení pomocí exponentu:

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(}_{n\text{-krát}}x)\cdots)).$$

Zadání tak v tomto značení říká $f^{f(b)}(a) + ab = f(a)f(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme, že máme funkci f splňující zadání. Dosazením $(a, b) = (n, n)$ dostáváme $f^{f(n)}(n) = (f(n))^2 - n^2$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Hodnota $f^{f(n)}(n)$ je přirozené číslo a speciálně $f^{f(n)}(n) > 0$. Tedy $(f(n))^2 - n^2 > 0$, z čehož už plyne $f(n) > n$, neboť n i $f(n)$ jsou kladná čísla.

Dosazení $(a, b) = (x, y)$ dává rovnost $f^{f(x)}(y) + xy = f(x)f(y)$. Podobně dosazením $(a, b) = (y, x)$ získáme $f^{f(y)}(x) + yx = f(y)f(x)$. Porovnáním těchto dvou rovností obdržíme

$$f^{f(x)}(y) = f^{f(y)}(x)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$. Konkrétně pro volbu $(x, y) = (a, f(a))$ dostáváme

$$f^{f(a)+1}(a) = f^{f(a)}(f(a)) = f^{f(f(a))}(a)$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Aplikací nerovnosti $n < f(n)$ pro $n \in \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$ dostaneme sérii nerovností

$$a < f(a) < f(f(a)) < f(f(f(a))) < \cdots$$

Rovnost $f^{f(a)+1}(a) = f^{f(f(a))}(a)$ tak už nutně implikuje $f(f(a)) = f(a) + 1$.

Označme $N = f(1)$. Z předchozí rovnosti indukcí plyne $f(n) = n + 1$ pro všechna $n \geq N$. Skutečně dosazení $a = 1$ dává $f(N) = N + 1$ a dosazením $a = n$ máme z indukčního předpokladu $f(n) = n + 1$ rovnost $f(n+1) = f(f(n)) = f(n) + 1 = n + 2$.

Dosazením $(a, b) = (N, n)$ do zadání nyní už pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(N + 1)f(n) = f(N)f(n) = Nn + f^{f(n)}(N) = Nn + N + f(n),$$

kde rovnost $f^{f(n)}(N) = N + f(n)$ plyne z $f(n) = n + 1$ pro všechna $n \geq N$. Odtud už jednoduchou úpravou dostáváme, že musí platit $f(n) = n + 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zkouška

$$f^{f(b)}(a) + ab = a + f(b) + ab = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1) = f(a)f(b)$$

potvrzuje, že tato funkce skutečně vyhovuje zadání a důkaz je tímto hotov.

Alternativní řešení (podle Jakuba Štepa):
Stejně jako v prvním řešení platí $f(n) > n$, $f^{f(n)}(n) = (f(n))^2 - n^2$ a $f^{f(x)}(y) = f^{f(y)}(x)$.

Pro $a \in \mathbb{N}$ položme $b = f^{f(a)-1}(a)$. Pak $f(b) = f^{f(a)}(a) = (f(a))^2 - a^2$. Dosazením $(x, y) = (b, a)$ do rovnosti $f^{f(x)}(y) = f^{f(y)}(x)$ platí

$$f^{(f(a))^2 - a^2}(a) = f^{f(a)}(f^{f(a)-1}(a)) = f^{2f(a)-1}(a).$$

Stejnou argumentací jako v prvním řešení z tohoto plyne $(f(a))^2 - a^2 = 2f(a) - 1$, což je ekvivalentní $(f(a) - 1)^2 = a^2$. Nutně už tedy musí platit $f(a) = a + 1$ pro všechna $a \in \mathbb{N}$ a zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje zadání.

Poznámky:
Klíčová myšlenka řešení je v dosazení (x, y) a (y, x) a dokázání některých z vlastností zadané funkce ($f(n) > n$, f je prostá, rostoucí, na $\mathbb{N} \setminus \{1\}, \dots$). Došlá řešení se s tím popasovala různorodě a většinou správně. Jako důležité upozornění za zmínku stojí, že z rovnosti $f(f(a)) = f(a) + 1$ v prvním řešení hned neplyne $f(n) = n + 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, ale pouze pro n z oboru hodnot funkce f. Také je na konci řešení třeba udělat zkoušku. *(Martin Raška)*

Úloha 8.

Rozhodněte, zda existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(f(x)) = x^2 - x - 2023$ pro všechna reálná x. *(Josef Minařík)*

Řešení:
Dokážeme, že taková funkce neexistuje.

Předpokládejme, že funkce ze zadání existuje. Dosazením zjistíme, že $f(f(\sqrt{2023})) = -\sqrt{2023}$ a naopak $f(f(-\sqrt{2023})) = \sqrt{2023}$. To znamená, že když začneme s hodnotou $\sqrt{2023}$ a budeme funkci f pouštět opakovaně, budou se výsledky pro nějaká a, b vyvíjet takto:

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{2023} \arrow[r, mapsto] & a \arrow[d, mapsto] \\
b \arrow[u, mapsto] & -\sqrt{2023} \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Vidíme, že když na a pustíme čtyřikrát f, dostáváme opět a. Už víme, že takové pravidlo splňují čísla $\sqrt{2023}$ a $-\sqrt{2023}$, dále tak najdeme všechny možnosti.

Má platit $f(f(f(f(a)))) = a$. Dosazováním z rovnosti v zadání upravujeme na:

$$\begin{aligned} f(f(a))^2 - f(f(a)) - 2023 &= a, \\ (a^2 - a - 2023)^2 - (a^2 - a - 2023) - 2023 &= a, \\ (a^2 - a - 2023)^2 - a^2 &= 0, \end{aligned}$$

což rozložíme na součin

$$(a^2 - 2a - 2023)(a^2 - 2023) = 0.$$

Tedy buď $a = \pm\sqrt{2023}$ (o těchto možnostech už víme), nebo $a = a^2 - a - 2023 = f(f(a)) = b$:

- Pokud $a = \sqrt{2023}$, tak vidíme, že $f(\sqrt{2023}) = a = \sqrt{2023}$, ale $f(\sqrt{2023}) = f(a) = -\sqrt{2023}$.
- Pokud $a = -\sqrt{2023}$, tak je $b = f(f(a)) = \sqrt{2023}$. Vidíme, že $f(\sqrt{2023}) = a = -\sqrt{2023}$, ale $f(\sqrt{2023}) = f(b) = \sqrt{2023}$.
- Pokud $a = b$, tak vidíme, že $f(a) = -\sqrt{2023}$, ale $f(a) = f(b) = \sqrt{2023}$.

Ve všech případech dostaneme, že by dosazením jedné hodnoty do funkce mělo vyjít víc hodnot, takže vhodná funkce ze zadání neexistuje.

Poznámky:
Někteří řešitelé to dokazovali bez konkrétních hodnot a pak bylo potřeba dokázat, že rovnice $f(f(f(f(a)))) = a$ má dost řešení, což dva řešitelé neudělali a pak jsem strhával bod. Nejjednodušším způsobem, jak tuto část vyřešit, bylo podle mě řešení vypsat, klidně i nalezená nějakým programem. *(Matouš Šafránek)*