# Kombinatorická geometrie 2

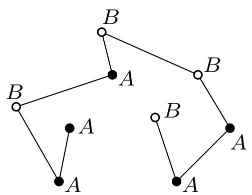
2. seriálová série  Termín odeslání: 6. února 2023

**Úloha 1.** (5 bodů)

Fíla tvrdí, že v rovině nalezl konvexní množinu $A$ s následující vlastností: pro jakékoli přirozené $n$ lze k $A$ přidat právě $n$ různých bodů neležících v $A$ tak, aby i po přidání těchto bodů zůstala konvexní. Rozhodněte, zda skutečně existuje množina s touto vlastností, nebo to Fíla popletl.

**Úloha 2.** (5 bodů)

V rovině leží dvě disjunktní konečné množiny bodů $A$ a $B$, přičemž sjednocení $A$ a $B$ tvoří množinu bodů v obecné poloze. Majda nakreslila neprotínající se lomenou čáru[1] s vrcholy právě v bodech množin $A$ a $B$. Potom se podívala, v jakém pořadí čára procházela body množin $A$ a $B$: za každý bod množiny $A$ si zapsala „$A$“ a za každý bod množiny $B$ si zapsala „$B$“. Dokažte, že ať už byly body rozmístěny jakkoliv, dovedla Majda nakreslit lomenou čáru tak, aby se v jejím zapsaném textu nikde neobjevily řetězce „$ABA$“ ani „$BAB$“.




$$A\overline{A\underline{BA}}\underline{B}BAAB$$

**Úloha 3.** (5 bodů)

Mějme konvexní mnohostěn $A$ v prostoru. Pepa by rád zvolil bod $O$ uvnitř $A$ tak, aby platilo, že kdykoliv přímka procházející bodem $O$ protíná hranici mnohostěnu $A$ v bodech $X$, $Y$, pak je splněna nerovnost

$$\frac{1}{3} \leq \frac{|OX|}{|OY|} \leq 3.$$

Dokažte, že Pepa takový bod vždy dovede najít.

---

[1] *Lomená čára* je tvořena několika na sebe navazujícími úsečkami. *Vrcholy* lomené čáry rozumíme koncové body úseček, které ji tvoří.

# Kombinatorická geometrie 2

2. seriálová série	Vzorové řešení

## Úloha 1.

*Fíla tvrdí, že v rovině nalezl konvexní množinu $A$ s následující vlastností: pro jakékoli přirozené $n$ lze k $A$ přidat právě $n$ různých bodů neležících v $A$ tak, aby i po přidání těchto bodů zůstala konvexní. Rozhodněte, zda skutečně existuje množina s touto vlastností, nebo to Fíla popletl.*

*(Josef Minařík)*

Řešení:

Nejprve si připomeňme, co znamená, že množina $A$ bodů v rovině je konvexní. To je právě tehdy, když pro každé dva body $U, V \in A$ je celá úsečka $UV$ také v množině $A$.

Ukážeme, že Fíla mohl mít pravdu. Tedy že $A$ s takovými vlastnostmi existuje. Je to například otevřený kruh. Nechť tedy $A$ je množina všech bodů kruhu, které neleží na hraniční kružnici.

Jistě je $A$ konvexní. Pokud zvolíme $U$ a $V \in A$, bude úsečka $UV$ celá uvnitř kruhu, tedy celá v $A$.

Zbývá ukázat, že můžeme k $A$ přidat $n$ bodů (pro libovolné $n$) tak, aby množina zůstala konvexní. K tomu nám stačí přidávat libovolné body ležící na hraniční kružnici $A$. Množinu $A$ s těmito přidanými body značme $A'$.

Ověřme, že i tato nová množina $A'$ je konvexní. Zvolme různé $U, V \in A'$.

Podívejme se na přímku $UV$. Ta protne hraniční kružnici $A'$ ve dvou bodech, nazvěme je $X$ a $Y$. Nepochybně úsečka $UV$ je podmnožinou úsečky $XY$. Vnitřek $XY$ je celý v $A'$. Tedy jediné body úsečky $UV$, které by v $A'$ mohly nebýt, jsou právě $X$ a $Y$.

Ovšem $X$ je bodem $UV$ pouze tehdy, kdy $X = U$ nebo $X = V$. A v takovém případě jistě $X \in A'$. Obdobně pro $Y$.

Tedy celá úsečka $UV$ je v $A'$ a $A'$ je konvexní.

Tím jsme ukázali, že otevřený kruh má požadované vlastnosti.

Poznámky:

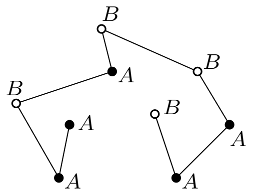
Skoro všechna řešení byla pěkná a správná. Pár řešitelů bojovalo s definicí konvexnosti. Obecně „být konvexní“ a „nemít úhel větší než 180°“ nejsou stejné věci, to platí jen pro mnohoúhelníky. Více se můžete dočíst v seriálu. *(Václav Janáček)*

## Úloha 2.

*V rovině leží dvě disjunktní konečné množiny bodů $A$ a $B$, přičemž sjednocení $A$ a $B$ tvoří množinu bodů v obecné poloze. Majda nakreslila neprotínající se lomenou čáru[1] s vrcholy právě v bodech množin $A$ a $B$. Potom se podívala, v jakém pořadí čára procházela body množin $A$ a $B$: za každý bod množiny $A$ si zapsala „$A$“ a za každý bod množiny $B$ si zapsala „$B$“. Dokažte, že ať už byly*

[1] *Lomená čára* je tvořena několika na sebe navazujícími úsečkami. *Vrcholy* lomené čáry rozumíme koncové body úseček, které ji tvoří.

*body rozmístěny jakkoliv, dovedla Majda nakreslit lomenou čáru tak, aby se v jejím zapsaném textu nikde neobjevily řetězce „$ABA$“ ani „$BAB$“.*




$A\overline{A\underline{BA}}\underline{B}BAAB$

*(Josef Minařík)*

Řešení:

Konvexní obal sjednocení $A$ a $B$ označíme $K$. Silnou indukcí ukážeme, že lomenou čáru ze zadání umíme najít, ať začneme v libovolném bodu na $K$. Pokud máme jen jeden nebo dva body, tvrzení zjevně platí. Přepokládejme, že jich máme víc a vezměme libovolný bod $X$ na $K$. Označme $K'$ konvexní obal $(A \cup B) \setminus \{X\}$. Protože v této množině jsou alespoň dva body a všechny body jsou v obecné poloze, můžeme vybrat sousední body $Y$ a $Z$ na $K'$, aby úsečky $XY$ a $XZ$ neprotínaly $K'$.

Pokud $Y$ náleží do stejné množiny jako $X$, můžeme s ním $X$ spojit a použít indukci na $(A \cup B) \setminus \{X\}$, začínat budeme v $Y$. Protože $XY$ neprotíná $K'$, můžeme k lomené čáře, kterou dostaneme z indukce, přidat $XY$ a nebude se protínat. Kdyby ve vzniklé posloupnosti písmen byl řetězec „$BAB$“ nebo „$ABA$“, buď by neobsahoval první písmeno, což nelze z indukce, nebo by obsahoval první písmeno, což nelze, protože posloupnost začíná dvěma stejnými písmeny. Tudíž přidáním $X$ do posloupnosti, kterou dostaneme z indukce, nepřidáme „$BAB$“ ani „$ABA$“.

Obdobně budeme postupovat, pokud $Z$ náleží do stejné množiny jako $X$ a $Y$ do ní nenáleží.

Zbývá případ, kdy $Y$ i $Z$ náleží do opačné množiny než $X$. Protože $Y$ a $Z$ sousedí na $K'$, trojúhelník $XYZ$ je kromě úsečky $YZ$ mimo $K'$. Použijeme-li tedy indukci na $(A \cup B) \setminus \{X, Y\}$ se začátkem v $Z$ a přidáme-li ke vzniklé lomené čáře úsečky $XY$ a $YZ$, výsledná lomenná čára se opět nebude protínat. Kdyby ve vzniklé posloupnosti písmen byl řetězec „$BAB$“ nebo „$ABA$“, buď by neobsahoval první dvě písmena, což nelze z indukce, nebo by začínal na prvním nebo druhém písmenu, což nelze, protože druhé a třetí písmeno jsou stejné. Tudíž přidáním $X$ a $Y$ do posloupnosti, kterou dostaneme z indukce, nepřidáme „$BAB$“ ani „$ABA$“. Tím je důkaz hotov.

Poznámky:

Většina řešení si správně tipla, že budeme používat indukci a budeme začínat na konvexním obalu. Výběr $Y$ a $Z$ se ukázal být větším oříškem. *(Magdaléna Mišinová)*

## Úloha 3.

*Mějme konvexní mnohostěn $A$ v prostoru. Pepa by rád zvolil bod $O$ uvnitř $A$ tak, aby platilo, že kdykoliv přímka procházející bodem $O$ protíná hranici mnohostěnu $A$ v bodech $X$, $Y$, pak je splněna nerovnost*

$$\frac{1}{3} \leq \frac{|OX|}{|OY|} \leq 3.$$

*Dokažte, že Pepa takový bod vždy dovede najít.* *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:

Pro přehlednost budeme v tomto řešení hranici mnohostěnu $A$ značit jako $A_h$ a sjednocení jeho hranice s vnitřkem jako $A_v$.

Všimněme si, že podmínka ze zadání je ekvivalentní následujícímu tvrzení: když zvolíme libovolný bod $X \in A_h$ a označíme $Y$ druhý průsečík přímky $XO$ s $A_h$, bude platit $\frac{|XO|}{|XY|} \leq \frac{3}{4}$.

Nyní uvažme stejnolehlost s koeficientem $\frac{3}{4}$ se středem v $X$ a označme ji $\mathcal{S}_X$. Nerovnost $\frac{|XO|}{|XY|} \leq \frac{3}{4}$ je splněna právě tehdy, když $O \in \mathcal{S}_X(A_v)$. Bod $O$ splňuje zadání právě tehdy, když

$$O \in \bigcap_{X \in A_h} \mathcal{S}_X(A_v),$$

neboli když leží v průniku všech obrazů mnohostěnu $\mathcal{S}_X(A_v)$. Pokud se nám tedy podaří dokázat, že je daný průnik neprázdný, úloha bude vyřešena.

Množiny $\mathcal{S}_X(A_v)$ jsou naštěstí konvexní, omezené a uzavřené, protože $A_v$ tyto vlastnosti má a žádná z nich se nemůže ztratit zobrazením množiny ve stejnolehlosti. Můžeme použít nekonečnou Hellyho větu. Potřebujeme ukázat, že pro libovolné 4 body $P, Q, R, S \in A_h$ platí

$$\mathcal{S}_P(A_v) \cap \mathcal{S}_Q(A_v) \cap \mathcal{S}_R(A_v) \cap \mathcal{S}_S(A_v) \neq \emptyset.$$

Dokážeme, že těžiště těchto čtyř bodů, tedy bod $T = \frac{1}{4}(P+Q+R+S)$, leží v daném průniku. Ukážeme-li $T \in \mathcal{S}_P(A_v)$, $T$ bude ze symetrie ležet i ve zbylých třech množinách. Kam nám stejnolehlost $\mathcal{S}_P$ zobrazí nějaký bod $Z$? Bude to na bod $\mathcal{S}_P(Z) = P + \frac{3}{4}(Z-P)$. Když nyní zvolíme $Z = \frac{1}{3}(Q+R+S)$, dostaneme

$$\mathcal{S}_P(Z) = P + \frac{3}{4}(Z-P) = P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}S - \frac{3}{4}P = T.$$

Protože $Z$ je konvexní kombinace $Q$, $R$, $S$ a mnohostěn $A$ je konvexní, určitě platí $Z \in A_v$, a proto $T = \mathcal{S}_P(Z) \in \mathcal{S}_P(A_v)$.

Tím jsme dokázali, že každé čtyři obrazy se protínají, takže se podle Hellyho věty protínají všechny, a úloha je vyřešena.

Poznámky:

Přibližně polovina řešení se vydala stejným směrem jako to vzorové a použila Hellyho větu. Zbylá úspěšná řešení si všimla, že jako $O$ můžeme zvolit těžiště mnohostěnu $A$. *(Josef Minařík)*