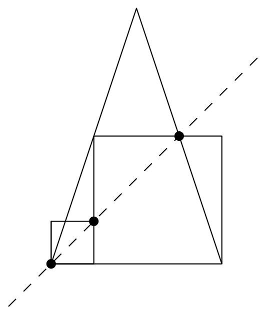
Na jedné přímce

2. podzimní série — Termín odeslání: 14. listopadu 2022

Úloha 1. (3 body)
Petr nakreslil úsečku délky 9 a její krajní body obarvil růžově. Obarvěte růžově právě tři další body na Petrově úsečce tak, aby pro každou vzdálenost 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 existovaly dva růžové body s touto vzdáleností.

Úloha 2. (3 body)
Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Čtverce $BXYZ$ a $XCPQ$ leží ve stejné polorovině vůči BC jako bod A. Navíc X leží na úsečce BC, Q leží na úsečce AB a Y leží na úsečce QX. Průsečík PQ a AC označíme K. Dokažte, že body B, Y a K leží na jedné přímce.



Úloha 3. (3 body)
Zdeněk vzal pastelky a každý z bodů $1, 2, \ldots, 2022$ na číselné ose obarvil buď modře, nebo červeně. Úsečku spojující dva z obarvených bodů nazveme *modrou*, pokud jsou oba její krajní body modré, *červenou*, pokud jsou oba červené, a *fialovou*, pokud je jeden modrý a jeden červený. Mohl Zdeněk obarvit body tak, aby součet délek fialových úseček byl stejný jako součet délek modrých a červených úseček dohromady?

Úloha 4. (5 bodů)
V každém nezáporném celočíselném bodě na číselné ose roste strom. Na stromech roste celkem 2022 hrušek, přičemž na jednom stromě může růst vícero hrušek, nicméně průměrná vzdálenost hrušek od nuly je 2022. Šimon si chce postavit na číselné ose chatrč tak, aby součet vzdáleností chatrče od hrušek byl nejmenší možný. Uvažujeme-li všechna vyhovující rozmístění hrušek, kde nejdál od nuly může Šimonova chatrč stát?

Úloha 5. (5 bodů)
Jsou dány obdélníky $ABCD$ a $AEFG$, přičemž platí, že body B, D, E a G leží na jedné přímce, navíc bod G leží uvnitř obdélníku $ABCD$ a bod B uvnitř $AEFG$. Průsečík CD a EF označme P. Průsečík BC a FG označme Q. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce.

Úloha 6. (5 bodů)

Trojúhelník ABC má kružnici opsanou ω se středem O. Kolmice k BC procházející bodem A protíná BC v bodě D a ω v bodě E různém od A. Dokažte, že středy úseček AC, BE a DO leží na jedné přímce.

Úloha 7. (5 bodů)

V trojúhelníku ABC má úhel u vrcholu A velikost 60°. Uvažujme bod D uvnitř úsečky BC. Středy kružnic opsaných ABD a ACD postupně označíme O_1 a O_2. Průsečík BO_1 a CO_2 označíme M. Střed kružnice opsané DO_1O_2 označíme N. Dokažte, že existuje pevný bod X takový, že pro každou polohu D na úsečce BC leží body M, N a X na jedné přímce.

Úloha 8. (5 bodů)

Je dán ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC, jehož kružnice opsaná ω má střed O. Označme A_0 střed strany BC a nechť přímka AA_0 protíná ω v bodě A_1 různém od A. Nakonec jako X_A označme průsečík tečny k ω v bodě A_1 a kolmice k AO procházející bodem A_0. Analogicky zkonstruujeme X_B a X_C. Dokažte, že body X_A, X_B, X_C leží na jedné přímce.

Na jedné přímce

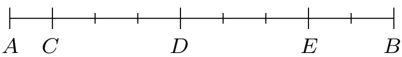
2. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Petr nakreslil úsečku délky 9 *a její krajní body obarvil růžově. Obarvěte růžově právě tři další body na Petrově úsečce tak, aby pro každou vzdálenost* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *existovaly dva růžové body s touto vzdáleností.* *(„madam Verča“ Hladíková)*

ŘEŠENÍ:

Krajní body úsečky označíme A a B, kde A umístíme na číselné ose do 0 a B do 9. Musíme obarvit ještě tři body; tyto body označíme C, D, E, kde C položíme do bodu 1, D do bodu 4 a E do bodu 7. Tím se mezi růžovými body vyskytne všech devět vzdáleností:



$$
\begin{array}{lll}
|AC| = 1, & |EB| = 2, & |CD| = 3, \\
|AD| = 4, & |DB| = 5, & |CE| = 6, \\
|AE| = 7, & |CB| = 8, & |AB| = 9.
\end{array}
$$

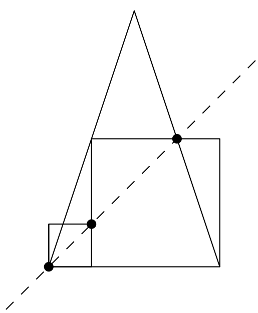
POZNÁMKY:

Tato úloha měla čtyři různá řešení, kde dvě a dvě řešení byla osově symetrická. Druhé řešení, které zde neuvádíme, je 0, 1, 2, 6, 9. Toto řešení bylo i mezi odevzdanými řešeními méně časté.

(Petr Hladík)

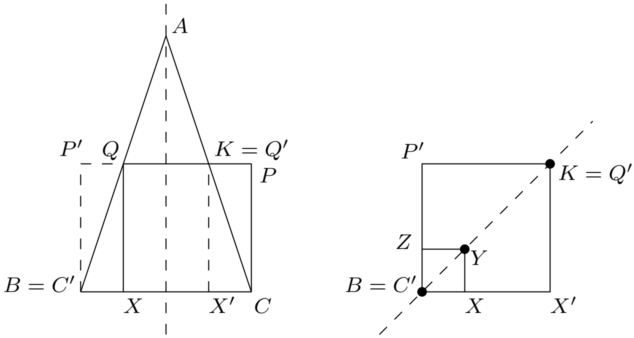
Úloha 2.

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Čtverce $BXYZ$ a $XCPQ$ leží ve stejné polorovině vůči BC jako bod A. Navíc X leží na úsečce BC, Q leží na úsečce AB a Y leží na úsečce QX. Průsečík PQ a AC označíme K. Dokažte, že body B, Y a K leží na jedné přímce.



(Radek Olšák)

Řešení:
Zrcadleme čtverec $XCPQ$ podle výšky rovnoramenného trojúhelníku ABC na stranu a. Takto se bod C zobrazí na $C' = B$ a Q na $Q' = K$. Pak $|\sphericalangle Q'C'X'| = |\sphericalangle KBX| = 45°$, jelikož úsečka BK je úhlopříčkou zrcadleného čtverce. Protože BY je úhlopříčkou čtverce $BXYZ$, tak i $|\sphericalangle YBX| = 45°$. Dohromady tedy dostáváme $|\sphericalangle KBX| = |\sphericalangle YBX| = 45°$, proto B, Y, K musejí ležet na jedné přímce.



Poznámky:
Většina řešení byla napsána hezky. Správná řešení pracovala s osovou souměrností (viz vzorové řešení), velikostí úhlu $|\sphericalangle BYK| = 180°$ (z podobnosti trojúhelníků BXQ a KPC dostaneme $|KP| = |XY|$, z toho plyne rovnoramennost trojúhelníku QKY, tedy $|\sphericalangle KYQ| = |\sphericalangle BYZ| = 45°$, $|\sphericalangle ZYQ| = 90°$, pak $|\sphericalangle BYK| = |\sphericalangle KYQ| + |\sphericalangle BYZ| + |\sphericalangle ZYQ| = 180°$) či s podobností trojúhelníků BXY a BEK (kde E je pravoúhlý průmět bodu K na úsečku BC), jež mají jeden společný bod. Body jsem občas strhávala, pokud nebylo dokázáno nějaké podstatné tvrzení používané v důkazu. Další chybou, která se občas objevovala, byl důkaz kruhem. Používal se předpoklad, že $\sphericalangle BYX$ a $\sphericalangle QYK$ jsou úhly vrcholové. Což ovšem platí, pouze pokud B, Y, K leží na jedné přímce, tedy se používá to, co chceme dokázat, jako předpoklad. *(Anna Marie Minarovičová)*

Úloha 3.

Zdeněk vzal pastelky a každý z bodů $1, 2, \ldots, 2022$ na číselné ose obarvil buď modře, nebo červeně. Úsečku spojující dva z obarvených bodů nazveme modrou, pokud jsou oba její krajní body modré, červenou, pokud jsou oba červené, a fialovou, pokud je jeden modrý a jeden červený. Mohl Zdeněk obarvit body tak, aby součet délek fialových úseček byl stejný jako součet délek modrých a červených úseček dohromady? *(Josef Minařík)*

Řešení:
Uvažujeme všech $\binom{2022}{2} = \frac{2022 \cdot 2021}{2}$ úseček o délkách $1, 2, \ldots, 2021$. Otázkou je, zda existuje obarvení bodů takové, že součet délek modrých a červených úseček je roven součtu délek fialových úseček. Z toho je zřejmé, že náš cíl je dosažitelný jedině tehdy, když je součet délek všech úseček dělitelný dvěma, tedy pokud je součet délek sudý. Pokud uvážíme úsečku délky k, potom se úsečka takové délky vyskytuje na obarvené části osy právě $(2022 - k)$-krát, protože existuje $(2022 - k)$ bodů, které mohou být levým krajním bodem takové úsečky. Tím pádem uvažujeme sumu

$$S = 1 \cdot 2021 + 2 \cdot 2020 + 3 \cdot 2019 + \cdots + 1011 \cdot 1011 + \cdots + 2019 \cdot 3 + 2020 \cdot 2 + 2021 \cdot 1,$$

kde S sčítá délky všech úseček. Všimněme si, že se každý člen kromě členu $1011 \cdot 1011$ vyskytne ve výrazu právě dvakrát, takže sumu můžeme přehledněji přepsat

$$S = 2 \cdot (1 \cdot 2021 + 2 \cdot 2020 + 3 \cdot 2019 + \cdots + 1010 \cdot 1012) + 1011 \cdot 1011.$$

Víme, že součin libovolného čísla s dvojkou je sudé číslo, zatímco součin dvou lichých čísel je liché číslo. Součet délek všech úseček S je tedy součet sudého a lichého čísla, tedy liché číslo. Z toho vyplývá, že Zdeněk nemohl obarvit čísla tak, aby součet délek fialových úseček byl stejný jako součet délek modrých a červených úseček.

Poznámky:
V zadání je menší nejasnost ohledně toho, co přesně se myslí úsečkou mezi dvěma čísly. Objevilo se tak pár řešení, která řešila podobnou, ale triviální, úlohu. Mnoho řešitelů mělo správný nápad zaměřit se na to, zda součet délek vůbec lze rozdělit podle Zdeňkova přání, a úlohu vyřešit na základě parity součtu. Někteří řešitelé došli ke správné sumě, kterou pak natvrdo vyčíslili a dále pracovali s tímto číslem. Za to se strhával bod, jelikož nebylo jasné, kde se číslo vzalo, ale v řešení se dále využívalo jeho vlastností. *(Diana Bergerová)*

Úloha 4.

V každém nezáporném celočíselném bodě na číselné ose roste strom. Na stromech roste celkem 2022 *hrušek, přičemž na jednom stromě může růst vícero hrušek, nicméně průměrná vzdálenost hrušek od nuly je* 2022*. Šimon si chce postavit na číselné ose chatrč tak, aby součet vzdáleností chatrče od hrušek byl nejmenší možný. Uvažujeme-li všechna vyhovující rozmístění hrušek, kde nejdál od nuly může Šimonova chatrč stát?* (Josef Minařík)

Řešení:
Nejdříve si ukážeme, že Šimon musí chatrč postavit mezi 1011. a 1012. hruškou, kde pořadí hrušek je určeno jejich vzdáleností od nuly. Pokud by totiž chatrč stála k nule blíže než bod, na kterém je 1011. hruška, pak se posunutím směrem doprava přiblíží k alespoň 1012 hruškám a zároveň se vzdálí od maximálně 1010 hrušek. Součet vzdáleností ke všem hruškám se tedy zmenší, čímž se zmenší i průměrná vzdálenost. Stejně můžeme argumentovat i pokud by chatrč stála dále než 1012. hruška. Zároveň platí, že pokud budeme chatrč posouvat mezi těmito dvěma hruškami, tak se vždy přiblížíme ke stejnému počtu hrušek jako se oddálíme, což znamená, že se nám průměrná vzdálenost měnit nebude. Víme tedy, že Šimon může postavit chatrč kdekoliv mezi 1011. a 1012. hruškou. Jelikož ji chce postavit co nejdále od nuly, tak ji postaví v bodě, kde roste druhá z těchto hrušek.

Nyní musíme zjistit, jak nejdále od nuly může 1012. hruška stát. Jelikož je průměrná vzdálenost od nuly rovna 2022 a hrušek je 2022, tak součet vzdáleností všech hrušek od nuly musí být 2022^2. Nyní dokážeme, že chatrč nemůže stát dále než v bodě 4044. Pak by totiž všechny hrušky za ní museli mít vzdálenost od nuly alespoň 4045. Součet jejich vzdáleností by tedy byl alespoň $1011 \cdot 4045 > 2022^2$. Ostatní hrušky by tedy musely mít zápornou vzdálenost, což nelze. V bodě 4044 už chatrč stát může, pokud bude 1011 hrušek na stromě v bodě nula a zbylých 1011 hrušek v bodě 4044. V takovém případě je průměrná vzdálenost od nuly skutečně 2022 a chatrč můžeme postavit do bodu 4044, protože zde roste 1012. hruška.

Poznámky:
Někteří řešitelé bohužel pochopili úlohu jinak a mysleli si, že se Šimon neuspokojí s ničím jiným, než minimální vzdáleností od hrušek přes všechna jejich možná rozestavění – mysleli si tedy, že vzdálenost od všech hrušek musí být nulová. Tato úloha však bylo o dost jednodušší.

Jiná řešení zase správně poznamenala, že chatrč může vždy stát v mediánu hrušek, jejich autoři si již ale neuvědomili, že hruška také může stát v celém intervalu mezi prostředními hodnotami. Většina došlých řešení ale úlohu vyřešila naprosto správně. *(Martin Fof)*

Úloha 5.

Jsou dány obdélníky $ABCD$ a $AEFG$, přičemž platí, že body B, D, E a G leží na jedné přímce, navíc bod G leží uvnitř obdélníku $ABCD$ a bod B uvnitř $AEFG$. Průsečík CD a EF označme P. Průsečík BC a FG označme Q. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce. (Radek Olšák)

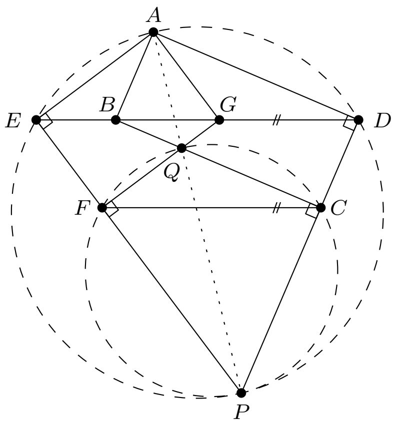
Řešení:
Nejprve dokážeme, že přímky určené úsečkami CF a DE jsou rovnoběžné. Na přímce určené úsečkou DE leží úhlopříčka obdélníku $ABCD$ i úhlopříčka obdélníku $AEFG$. Obdélníky jsou souměrné podle středu, a proto jsou protější vrcholy vždy stejně vzdálené od úhlopříčky.

Body A a C jsou tak stejně vzdálené od úhlopříčky BD. Body A a F jsou stejně vzdálené od úhlopříčky GE. Tedy body A, C a F jsou stejně vzdálené od přímky určené úsečkou DE. Z toho plyne, že jsou přímky určené úsečkami CF a DE rovnoběžné.

Jelikož $AEFG$ je obdélník, tak jsou každé dvě jeho protilehlé strany rovnoběžné. Z rovnoběžností $CF \parallel DE$ a $AE \parallel FG$ plyne, že úhly $\sphericalangle GFC$ a $\sphericalangle AED$ jsou stejně velké. Tedy i úhly $\sphericalangle AED$ a $\sphericalangle QFC$ jsou stejně velké. Dále z rovností

$$|\sphericalangle PDA| = |\sphericalangle AEP| = |\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle QFP| = 90^\circ$$

plyne, že jsou čtyřúhelníky $AEPD$ a $QFPC$ tětivové. Víme, že platí $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle QFC|$. Potom z vlastností obvodových úhlů plyne, že úhly $\sphericalangle APD$ a $\sphericalangle QPC$ jsou stejně velké. Tudíž přímky určené úsečkami QP a AP svírají s přímkou určenou úsečkou DP stejný úhel. A jelikož obě tyto přímky prochází bodem P, tak musí splývat. Proto body A, Q, P leží na jedné přímce.



Poznámky:

Většina řešitelů úlohu řešila pomocí úhlení, znalostí o tětivových čtyřúhelnících a podobnosti (čtyřúhelníků i trojúhelníků). Našlo se ovšem i pár odvážlivců, kteří úlohu řešili pomocí analytické geometrie. *(Terka Kučerová)*

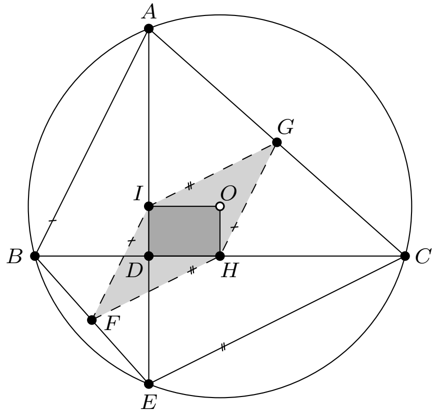
Úloha 6.

Trojúhelník ABC má kružnici opsanou ω se středem O. Kolmice k BC procházející bodem A protíná BC v bodě D a ω v bodě E různém od A. Dokažte, že středy úseček AC, BE a DO leží na jedné přímce. *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:

Označme postupně středy úseček BE, AC, BC a AE jako body F, G, H, I. V trojúhelnících BEA a BCA jsou úsečky FI a HG po řadě středními příčkami. Obě tudíž musí být rovnoběžné se stranou AB, tedy jsou rovnoběžné navzájem. Obdobně v trojúhelnících EBC a EAC jsou úsečky FH a IG postupně středními příčkami. Tedy jsou rovnoběžné se stranou EC, takže i navzájem. Z těchto pozorování dostáváme, že čtyřúhelník $FHGI$ musí být rovnoběžníkem.

Dále střed kružnice leží na ose libovolné tětivy, proto úhly $\sphericalangle DHO$ a $\sphericalangle DIO$ musí být pravé. Čtyřúhelník $DHOI$ má tři pravé úhly, jedná se tedy o obdélník.



V libovolném rovnoběžníku platí, že se jeho úhlopříčky půlí. Takže střed úsečky OD je středem úsečky HI (z obdélníku $DHOI$), což je zároveň středem úsečky FG (z rovnoběžníku $FHGI$). Tím je důkaz hotov.

Dodejme ještě, že alternativně si můžeme všimnout, že body H a I jsou středy úhlopříček $ABEC$. Tedy střed úsečky HI (což je zároveň střed DO) je těžištěm celého čtyřúhelníku $ABEC$. Ale protože F a G jsou středy stran AC a BE, musí těžiště ležet i ve středu úsečky FG.

Poznámky:
Valná většina došlých řešení byla správná, nejčastějším postupem bylo to prostě vyúhlit, což bylo většinou trochu pracnější než zde uvedené vzorové řešení. Došla také tři počítací řešení. Například pokud člověk uvažuje kružnici opsanou jako jednotkovou kružnici s počátkem souřadnic v bodě O, dopočítat v klasické analytice souřadnice bodů pomocí souřadnic vrcholů čtyřúhelníka $ABEC$ vlastně není moc těžké. Dokonce se tímto ukáže, že úloha by platila, i kdyby body $ABEC$ neležely na kružnici, ale pouze by se zadefinoval bod O jako průsečík os stran AE a BC.

(Lenka Kopfová)

Úloha 7.

V trojúhelníku ABC má úhel u vrcholu A velikost $60°$. Uvažujme bod D uvnitř úsečky BC. Středy kružnic opsaných ABD a ACD postupně označíme O_1 a O_2. Průsečík BO_1 a CO_2 označíme M. Střed kružnice opsané DO_1O_2 označíme N. Dokažte, že existuje pevný bod X takový, že pro každou polohu D na úsečce BC leží body M, N a X na jedné přímce. *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:
Takový pevný bod X existuje a je jím Švrčkův bod příslušející vrcholu A v trojúhelníku ABC.

Povšimněme si, že vzhledem k tomu, že v trojúhelníku ABC je úhel u vrcholu A ostrý (ze zadání roven $60°$), mají i trojúhelníky ABD a ADC u vrcholu A ostré úhly a středy kružnic jim opsaných budou tudíž ležet v polorovině BCA.

Dokažme nejprve, že bod M leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Označme si $|\sphericalangle BAD| = \alpha_1$ a $|\sphericalangle DAC| = \alpha_2$. Pak z trojúhelníku ABD máme

$$|\sphericalangle O_1BD| = |\sphericalangle O_1DB| = \frac{180° - |\sphericalangle BO_1D|}{2} = \frac{180° - 2\alpha_1}{2} = 90° - \alpha_1,$$

kde první dvě rovnosti platí z rovnoramennosti trojúhelníku BO_1D a třetí rovnost plyne z toho, že $\sphericalangle BO_1D$ a $\sphericalangle \alpha_1$ jsou postupně středový a obvodový úhel nad tětivou BD v kružnici BDA. Obdobně platí $|\sphericalangle O_2DC| = |\sphericalangle O_2CD| = 90° - \alpha_2$.

Nyní v trojúhelníku MBC:

$$|\sphericalangle BMC| = 180^\circ - |\sphericalangle MBD| - |\sphericalangle MCD| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha_1) - (90^\circ - \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = 60^\circ.$$

Díky tomu, že O_1 a O_2 leží v polorovině BCA a oba úhly $\sphericalangle DBO_1$ i $\sphericalangle DCO_2$ jsou menší než pravé, leží i bod M v polorovině BCA, tím pádem jsou úhly $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle BMC$ obvodové nad BC a bod M leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Obdobně i

$$|\sphericalangle O_1DO_2| = 180^\circ - |\sphericalangle O_1DB| - |\sphericalangle O_2DC| = \alpha_1 + \alpha_2 = 60^\circ.$$

Bod N bude ležet v polorovině O_1O_2D (obdobně jako jsme to dokázali u O_1 a O_2), pak z kružnice O_1O_2D platí $|\sphericalangle O_1NO_2| = 2|\sphericalangle O_1DO_2| = 120^\circ$.

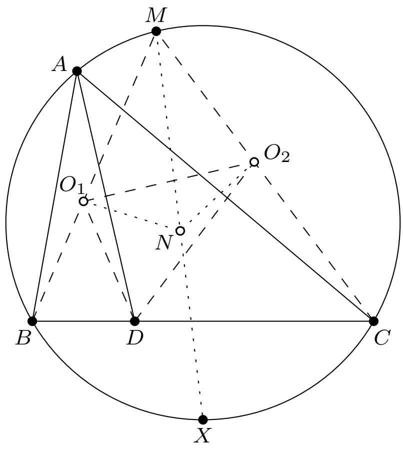
Nyní si povšimněme, že mohou nastat dvě situace: bod M bude ležet v polorovině opačné k O_1O_2D, nebo bude ležet na jedné z úseček CO_2 či BO_1 v závislosti na tom, zda bude v trojúhelníku ABC větší úhel u vrcholu B nebo C.

Zaměřme se nyní na první případ. Vzhledem k tomu, že bod M leží v polorovině opačné k O_1O_2D, leží i v opačné polorovině než bod N. Úhly $\sphericalangle O_1MO_2$ a $\sphericalangle O_1NO_2$ se sečtou na 180°, jsou to tedy obvodové úhly nad protějšími oblouky nad O_1O_2 a čtyřúhelník O_1NO_2M je tětivový.

V případě, kdy M leží (BÚNO) na CO_2, leží ve stejné polorovině jako bod N. Úhel O_1MO_2 je však nyní $180^\circ - |\sphericalangle CMB| = 120^\circ$ a čtyřúhelník O_1NMO_2 je opět tětivový (ony úhly jsou tentokrát obvodové nad stejnou tětivou).

Jelikož $|NO_1| = |NO_2|$, leží bod N ve středu oblouku O_1O_2 a je tedy Švrčkovým bodem příslušejícím bodu M ve výše zmíněné kružnici. Z téhož důvodu je i MN osa úhlu O_1MO_2, což je úhel BMC. (Pro případ $M \in O_2C$ je to pak antišvrk pro bod M, leží však na ose vnějšího úhlu, tedy úhlu BMC.)

Získali jsme tedy fakt, že nehledě na umístění bodu D na úsečce BC je vždy MN osou úhlu BMC, která jistě bude procházet středem oblouku BC, který neobsahuje bod M (tedy Švrčkovým bodem příslušejícím bodu M, ale i bodu A). A tím je úloha vyřešena.



Poznámky:
Valná většina řešitelů se dobrala k cíli podobným způsobem jako vzorové řešení. Spousta z nich konfigurace bodů okomentovala jen velmi málo nebo vůbec, na což jsem se mračila, ale body jsem strhávala až za nedostatečně odůvodněné kroky důkazu. Jeden bod jsem přidělila za zjištění, že oním bodem bude Švrčkův bod, a za pozorování, co by mohla vést k cíli, avšak nebyla ničím podložena.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 8.

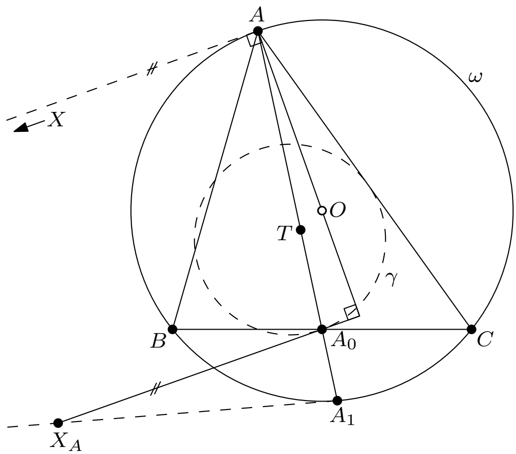
Je dán ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC, jehož kružnice opsaná ω má střed O. Označme A_0 střed strany BC a nechť přímka AA_0 protíná ω v bodě A_1 různém od A. Nakonec jako X_A označme průsečík tečny k ω v bodě A_1 a kolmice k AO procházející bodem A_0. Analogicky zkonstruujeme X_B a X_C. Dokažte, že body X_A, X_B, X_C leží na jedné přímce. *(Radek Olšák)*

ŘEŠENÍ:

Označme ω kružnici opsanou ABC, T těžiště trojúhelníku ABC a uvažujme stejnolehlost se středem v T s koeficientem $-\frac{1}{2}$. V této stejnolehlosti se kružnice opsaná ABC zobrazí na novou kružnici γ procházející středy stran ABC.[1]

Můžeme si všimnout, že tečna v A k ω se ve stejnolehlosti zobrazí na tečnu v A_0 k γ. Díky stejnolehlosti budou tyto přímky také rovnoběžné. Tečna v A k ω je zřejmě kolmá na AO, proto musí být tečna v A_0 k γ také kolmá na AO. Tečna v A_0 k γ je tedy onou zmíněnou kolmicí na AO procházející bodem A_0 ze zadání.

Nyní označme průsečík tečen k ω v bodech A a A_1 jako X – tento průsečík existuje, neboť díky různostrannosti trojúhelníku ABC jsou tečny různoběžné. Jelikož nyní platí $|XA| = |XA_1|$ a $XA \parallel X_AA_0$, dostáváme z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků AXA_1 a $A_0X_AA_1$ také $|X_AA_0| = |X_AA_1|$. Jelikož jsou tyto úsečky tečné postupně ke kružnicím γ a ω, má bod X_A stejnou mocnost k těmto dvěma kružnicím – leží tedy na jejich chordále.[2] Analogickým způsobem ukážeme, že i body X_B a X_C leží na této chordále, čímž je důkaz hotov.



POZNÁMKY:

Nízký počet řešení svědčil o vysoké obtížnosti úlohy. Šest správných řešení více méně následovalo postup ze vzorového řešení přes chordálu, úloha však šla vyřešit i pomocí šikovného použití vektorů (*Samo Rosiar*) či projektivních metod (*Jakub Štepo*, *Jára Potůček*). *(Marian Poljak)*

[1] Tato kružnice je známa jako tzv. *kružnice devíti bodů* nebo také *Feuerbachova*.

[2] Pokud pojmy jako mocnost či chordála neznáš, koukni se na příspěvek *https://prase.cz//library/MocnostAChordalyJT/MocnostAChordalyJT.pdf*.