Čtverce

2. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. BŘEZNA 2023

Čtvercem rozumíme číslo, které je druhou mocninou přirozeného čísla.

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Je dáno číslo $N = 1234567891011121314151617181920$. Rozhodněte, zda je možno přeuspořádat číslice N tak, aby vznikl čtverec.[1]

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Vašek má přirozené číslo n a zjistil, že $2n+1$ je čtverec. Ukažte, že potom lze $n+1$ vyjádřit jako součet dvou čtverců.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Hedvika dostala k narozeninám čtvercový dort o straně délky 10, který rozkrájela 100 řezy na 100 dílků. Každý řez je rovný, začíná přesně ve středu dortu a končí někde na jeho obvodu. Shodou okolností se přihodilo, že každý z dílků má stejný obvod o. Dokažte, že platí $10\sqrt{2} \le o \le 15$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Jsou dána přirozená čísla x, y, z taková, že $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ a $\mathrm{NSD}(x, y, z) = 1$. Dokažte, že $x + y$ je čtverec.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Kua chová své PraSátko, které se pohybuje rychlostí 2 km/h, ve čtvercové ohradě, kde jej hlídají čtyři víly. Víly se umí pohybovat pouze po obvodu ohrady, ale zato rychlostí až 3 km/h. Na začátku stojí v každém rohu ohrady jedna víla, zatímco PraSátko startuje přesně uprostřed ohrady. Chtělo by se dostat ke kraji ohrady a prorazit ven, ale nemůže tak učinit v bodě, kde se zrovna nachází alespoň dvě víly. Rozhodněte, zda pro víly existuje strategie, která zajistí, aby PraSátko nikdy nedovedlo utéct, ať už běhá jakkoliv.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Na straně AD čtverce $ABCD$ zvolíme bod X. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABX se dotýká stran AX, BX po řadě v bodech K, L. Dokažte, že přímka KL prochází pevným bodem nezávislým na volbě bodu X.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je n^3 násobkem $f(n)$ a zároveň je $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ čtverec.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
V rovině je dána mřížka tvořená $n \times n$ body, kde $n \ge 2$. Marian by chtěl nakreslit lomenou čáru[2] procházející všemi body této mřížky. Kolik nejméně úseček musí takovou lomenou čáru tvořit?

[1] Je povoleno číslice přeuspořádat i tak, aby výsledek začínal nulami.
[2] *Lomená čára* je tvořena několika na sebe navazujícími úsečkami.

Čtverce

2. jarní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

Je dáno číslo $N = 1234567891011121314151617181920$. Rozhodněte, zda je možno přeuspořádat číslice N tak, aby vznikl čtverec.[1] *(Natália Bátorová)*

Řešení:

K vyřešení této úlohy budeme využívat pravidla dělitelnosti čísly 3 a 9. Ta znějí následovně: číslo je dělitelné třemi, je-li třemi dělitelný jeho ciferný součet. To stejné platí i pro dělitelnost devíti: číslo je dělitelné devíti, je-li devíti dělitelný jeho ciferný součet.

Ciferný součet N je roven

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+0+1+1+1+2+1+3+1+4+1+5+1+6+1+7+1+8+1+9+2+0 = 102,$$

tj. je dělitelný třemi, jelikož $\frac{102}{3} = 34$.

Aby číslo bylo čtvercem, musí mít ve svém prvočíselném rozkladu každé prvočíslo v sudé mocnině. Ať už přeskupíme číslice jakkoliv, jejich součet se nezmění, vždy bude dělitelný třemi. Chtěli bychom ale, aby byl dělitelný i devíti, což není, neboť $9 \nmid 102$.

Ze zadaného čísla N tedy nelze přeuspořádáním číslic vytvořit čtverec.

Poznámky:

S úlohou si většina řešitelů hravě poradila a postupovala obdobně jako ve vzorovém řešení. Někteří na problematiku dělitelnosti devíti nahlíželi přes kvadratické zbytky. *(Denisa Hanušková)*

Úloha 2.

Vašek má přirozené číslo n a zjistil, že $2n + 1$ je čtverec. Ukažte, že potom lze $n + 1$ vyjádřit jako součet dvou čtverců. *(Natália Bátorová)*

Řešení:

Ze zadání víme, že $2n + 1$ lze vyjádřit jako druhou mocninu přirozeného čísla. $2n + 1$ je liché číslo, tedy i jeho druhá odmocnina musí být lichá. $2n + 1$ si tedy vyjádříme pomocí lichého $a \in \mathbb{N}$ jako

$$2n + 1 = a^2.$$

[1] Je povoleno číslice přeuspořádat i tak, aby výsledek začínal nulami.

Postupnými úpravami pak získáme

$$\begin{aligned}
2n+1 &= a^2,\\
n &= \frac{a^2-1}{2},\\
n+1 &= \frac{a^2+1}{2},\\
n+1 &= \frac{a^2+2a+1+a^2-2a+1}{4},\\
n+1 &= \frac{(a+1)^2}{4}+\frac{(a-1)^2}{4},\\
n+1 &= \left(\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Platí $2n+1 \geq 3$, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a > 1$. Tudíž jsou oba zlomky na pravé straně rovnosti přirozená čísla.

Ukázali jsme, že $n+1$ lze opravdu vyjádřit jako součet dvou čtverců.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná a postupovala jako ve vzorovém řešení. Někteří řešitelé zapomínali na diskuzi, že se jedná skutečně o součet čtverců dvou přirozených čísel a nesčítají nulu. Někteří pak raději vůbec neuváděli, odkud své neznámé berou. Za oba tyto nedostatky jsem se rozhodla body nestrhávat. *(Markéta Hanušková)*

Úloha 3.

Hedvika dostala k narozeninám čtvercový dort o straně délky 10, *který rozkrájela* 100 *řezy na* 100 *dílků. Každý řez je rovný, začíná přesně ve středu dortu a končí někde na jeho obvodu. Shodou okolností se přihodilo, že každý z dílků má stejný obvod o. Dokažte, že platí* $10\sqrt{2} \leq o \leq 15$.
(Matěj Gajdoš)

Řešení:
Každý dílek je ohraničen dvěma řezy a částí obvodu čtvercového dortu. Pokud sečteme obvody o všech dílků dohromady, započte se délka každého z řezů dvakrát a části obvodu dortu se sečtou na obvod celého čtverce, tedy na 40. Přitom má každý řez délku nejvýše $5\sqrt{2}$ jakožto půlku úhlopříčky čtverce. Po sečtení všech obvodů dílků tak dostaneme odhad

$$\begin{aligned}
100o &\leq 40 + 2\cdot 100\cdot 5\sqrt{2},\\
o &\leq \frac{2}{5} + 10\sqrt{2} < 15.
\end{aligned}$$

Označme S střed čtverce a A, B, C, D jeho vrcholy. Uvažujme dílek, který obsahuje na svém obvodu některý z vrcholů čtverce. Takový dílek může mít tvar čtyřúhelníku, nebo trojúhelníku. Pro oba případy nyní ukážeme platnost druhé nerovnosti.

Pokud má dílek tvar trojúhelníku, pak jedna z jeho stran vede z S do vrcholu čtverce a má délku $5\sqrt{2}$. Na obrázku je takovým dílkem SCZ, kde Z je průsečík řezu s obvodem čtverce různý od vrcholu C. Pak z trojúhelníkové nerovnosti pro SCZ plyne

$$|SZ| + |ZC| \geq |SC| = 5\sqrt{2},$$

takže pro obvod dílku o (a tedy i pro ostatní obvody, neboť všechny dílky mají stejný obvod) platí

$$o = |SZ| + |ZC| + |CS| \geq 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

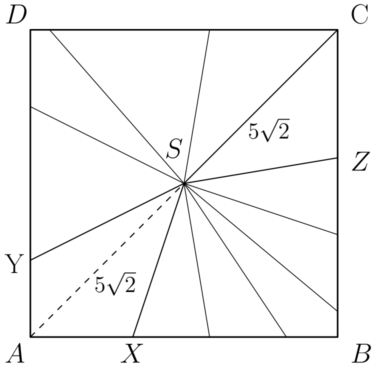
Pokud má rohový dílek tvar čtyřúhelníku, označíme X, Y průsečíky jeho řezů s obvodem čtverce, na obrázku takovému dílku odpovídá např. $AXSY$. Pak postupně aplikováním trojúhelníkové nerovnosti na ASY, AXS dostáváme

$$|AX| + |XS| \geq |AS| = 5\sqrt{2},$$
$$|SY| + |YA| \geq |AS| = 5\sqrt{2}.$$

Následným sečtením těchto dvou nerovností pak je

$$o = |AX| + |XS| + |SY| + |YA| \geq 10\sqrt{2},$$

čímž jsme i v tomto případě dokázali dolní odhad na obvod dílku.



Poznámky:
Většina došlých řešení postupovala podobně jako toto vzorové. Pozor na konstrukce dílků s minimálním nebo maximálním obvodem. U nich je potřeba dobře zdůvodnit, proč má daný dílek opravdu nejmenší (respektive největší) obvod. *(Matěj Gajdoš)*

Úloha 4.

Jsou dána přirozená čísla x, y, z taková, že $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ a $\mathrm{NSD}(x, y, z) = 1$. Dokažte, že $x + y$ je čtverec. *(Marian Poljak)*

Řešení:
Označme $d = \mathrm{NSD}(x, y)$, potom lze vyjádřit $x = d \cdot x\prime$ a $y = d \cdot y\prime$, kde $\mathrm{NSD}(x\prime, y\prime) = 1$. Rovnici ze zadání lze pomocí těchto vyjádření rozepsat

$$\frac{1}{d \cdot x\prime} + \frac{1}{d \cdot y\prime} = \frac{1}{z},$$
$$\frac{x\prime + y\prime}{x\prime \cdot y\prime} = \frac{d}{z}.$$

Jelikož platí $\mathrm{NSD}(x, y, z) = 1$, tak nutně $\mathrm{NSD}(z, d) = 1$. Platí $\mathrm{NSD}(x\prime, y\prime) = 1$, potom i $\mathrm{NSD}(x\prime, x\prime + y\prime) = 1$ a zároveň $\mathrm{NSD}(y\prime, x\prime + y\prime) = 1$, z čehož plyne $\mathrm{NSD}(x\prime \cdot y\prime, x\prime + y\prime) = 1$. Jelikož ale máme $\frac{x\prime + y\prime}{x\prime \cdot y\prime} = \frac{d}{z}$ a zároveň víme, že $\mathrm{NSD}(x\prime \cdot y\prime, x\prime + y\prime) = 1$ a $\mathrm{NSD}(z, d) = 1$, tak nutně $x\prime \cdot y\prime = z$ a $x\prime + y\prime = d$. Můžeme tak vyjádřit součet x, y:

$$x + y = d \cdot x\prime + d \cdot y\prime = d(x\prime + y\prime) = d \cdot d = d^2.$$

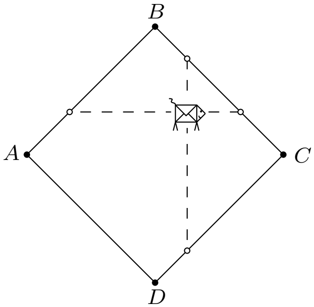
Z čehož plyne, že součet x a y je vždy čtverec, konkrétně druhá mocnina $\mathrm{NSD}(x, y)$.

Poznámky:
Většina řešení nějakým způsobem využila $\mathrm{NSD}(x, y)$. Nemálokrát se však objevilo tvrzení, že $\mathrm{NSD}(x, y, z) = 1$ implikuje $\mathrm{NSD}(x, y) = 1$, což ale není pravda! *(Klárka Grinerová)*

Úloha 5.

Kua chová své PraSátko, které se pohybuje rychlostí 2 km/h, ve čtvercové ohradě, kde jej hlídají čtyři víly. Víly se umí pohybovat pouze po obvodu ohrady, ale zato rychlostí až 3 km/h. Na začátku stojí v každém rohu ohrady jedna víla, zatímco PraSátko startuje přesně uprostřed ohrady. Chtělo by se dostat ke kraji ohrady a prorazit ven, ale nemůže tak učinit v bodě, kde se zrovna nachází alespoň dvě víly. Rozhodněte, zda pro víly existuje strategie, která zajistí, aby PraSátko nikdy nedovedlo utéct, ať už běhá jakkoliv. (Marian Poljak)

Řešení:
Začněme tím, že rohy čtvercové ohrady pojmenujeme A, B, C, D. Nechť A leží na souřadnicích $(-1, 0)$, C na $(1, 0)$, B na $(0, 1)$ a D na $(0, -1)$.



Nejprve se podíváme na vílu V_A, která začíná v bodě A. Udělme jí následující strategii: bude se pohybovat tak, aby její x-ová souřadnice byla vždy nekladná a její y-ová souřadnice se vždy shodovala s y-ovou souřadnicí PraSátka.

Potřebujeme dokázat, že víla tuto strategii zvládne dodržet, tedy že ať už se PraSátko bude pohybovat jakkoliv, víla s ním dokáže držet krok. Všimněme si, že nás zajímají hlavně změny polohy PraSátka v y-ové souřadnici. Potom můžeme pozorovat, že y-ová složka rychlosti PraSátka je rovna nejvýše 2 km/h, protože žádná ze složek rychlosti (x ani y) nemůže být větší než celková rychlost.

Nyní si spočtěme, jak rychle se umí víla pohybovat v y-ové souřadnici. Víla na rozdíl od PraSátka nedovede běžet svisle, místo toho běhá vždy „šikmo“, a to tak, že pohne-li se svisle o 1 km, pohne se i o 1 km vodorovně. Z Pythagorovy věty tak získáme, že na pohnutí o 1 km svisle musí uběhnout $\sqrt{2}$ km. Jelikož má celkovou rychlost 3 km/h, svislá složka její rychlosti je tak rovna $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Platí však $\frac{3}{\sqrt{2}} > 2$, takže víla dovede za všech okolností vyvinout ve svislé složce vyšší rychlost, než jakou se v této souřadnici pohybuje PraSátko. To znamená, že víla vždy dovede dodržovat vytyčenou strategii.

Ostatním vílám přiřaďme analogické strategie: V_C bude také hlídat y-ovou souřadnici PraSátka, ale x-ovou souřadnici si bude zachovávat nezápornou; naproti tomu V_B, resp. V_D budou hlídat x-ovou souřadnici a y-ovou souřadnici si udržovat nezápornou, resp. nekladnou.

Analogicky s předešlou argumentací pro V_A vidíme, že i zbylé víly dovedou za všech okolností dodržovat svoji strategii. Navíc si všimněme, že víly začínají v pozicích, které jsou s jejich strategiemi v souladu.

Závěrem pozorujme, že pro každou možnou x-ovou souřadnici PraSátka existují nejvýše dva body na obvodu čtverce $ABCD$, které mají stejnou x-ovou souřadnici – a jsou-li skutečně dva, pak má jeden z nich kladnou y-ovou souřadnici a druhý zápornou. Z toho plyne, že kdykoliv PraSátko doběhne do nějakého bodu na obvodu čtverce, potká se tam s alespoň jednou z víl V_B, V_D. Zcela analogicky také kdekoliv na obvodu čtverce potká jednu z V_A, V_C.

V souhrnu tedy: kdykoliv PraSátko přiběhne k ohrádce, potká tam alespoň dvě víly. Neumí tedy utéci a bude smutné.

Poznámky:

Všechna správná řešení postupovala obdobně. Častou chybou bylo magické odmávání nějaké části důkazu. K tomu obvykle docházelo buď u strategie víl, či u „optimální antistrategie“ PraSátka, která není samozřejmá – bylo zde vždy nutné dokázat, že PraSátko opravdu nemá žádnou lepší strategii. Spousta bodů byla ztracena právě v tomto bodě. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 6.

Na straně AD čtverce $ABCD$ zvolíme bod X. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABX se dotýká stran AX, BX po řadě v bodech K, L. Dokažte, že přímka KL prochází pevným bodem nezávislým na volbě bodu X. *(Michal Pecho)*

Řešení:

Dokážeme, že priamka KL prechádza stredom štvorca. Označme I stred kružnice vpísanej ABX a S stred štvorca $ABCD$. Keďže uhlopriečka AC v štvorci $ABCD$ je zároveň osou uhla BAX, budú body A, I, S ležať na priamke.

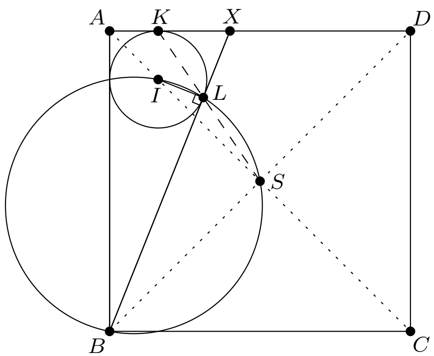
Platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ISB| = 90°$ a keďže L je bod dotyku kružnice vpísanej ABX so stranou BX, bude platiť $|\sphericalangle ILB| = 90°$. Z toho vyplýva, že body I, B, S, L ležia na kružnici nad priemerom IB. Platí

$$|\sphericalangle BLS| = |\sphericalangle BIS| = |\sphericalangle BAI| + |\sphericalangle ABI| = 45° + \frac{1}{2}|\sphericalangle ABX|.$$

Keďže XK a XL sú dotyčnice ku kružnici vpísanej trojuholníku ABX, platí $|XK| = |XL|$, a preto je trojuholník XKL rovnoramenný. Z toho plynie

$$|\sphericalangle KLX| = 90° - \frac{1}{2}|\sphericalangle KXL| = 90° - \frac{1}{2}(90° - |\sphericalangle ABX|) = 45° + \frac{1}{2}|\sphericalangle ABX|.$$

Dostávame tak $|\sphericalangle BLS| = 45° + \frac{1}{2}|\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle KLX|$ a keďže body X, L, B ležia na priamke, musia aj body K, L, S ležať na priamke, a teda priamka KL prechádza pevným bodom S.



Poznámky:

Väčšina riešení prišla na to, že pevným bodom je stred štvorca. Samotný dôkaz robilo veľa riešiteľov synteticky ale našli sa viacerí s analytickým riešením. *(Michal Pecho)*

Úloha 7.

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* n^3 *násobkem* $f(n)$ *a zároveň je* $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ *čtverec.*

(Matěj Doležálek)

Řešení:

Dokážeme, že jediné řešení je $f(n) = n^3$. Tato funkce skutečně vyhovuje zadání, jelikož je známé, že

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Toto tvrzení se dá například rychle ukázat přímočarou indukcí nebo obrázkovým důkazem.[2]

Dále pro spor předpokládejme, že funkce f není rovna $f(n) = n^3$. Pro $n = 1$ máme $f(1) \mid 1^3$, tedy $f(1) = 1$. Nechť n je nejmenší přirozené číslo takové, že $f(n) \neq n^3$. Pak ze zadání platí:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + f(n)$$

$$= \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + f(n) = \left(\frac{n(n-1)}{2} + k\right)^2 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + kn(n-1) + k^2,$$

pro nějaké vhodné přirozené číslo k. Odtud vidíme, že $f(n) = kn(n-1) + k^2$.

Dále víme, že $f(n) \neq n^3$, přitom ale $f(n) \mid n^3$, tedy $f(n) < n^3$. Takže $f(n) = kn(n-1)+k^2 < n^3$. Všimněme si, že pokud bychom ve vyjádření pro $f(n)$ dosadili $k = n$, pak je daný výraz přesně roven n^3. A protože daná funkce je rostoucí v parametru k, znamená to nutně $k < n$.

Dále víme, že $f(n) = k(n^2 - n + k) \mid n^3$, speciálně i $n^2 - n + k \mid n^3$. Úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
&n^2 - n + k \mid n^3,\\
&n^2 - n + k \mid n^3 - n(n^2 - n + k) = n^2 - nk,\\
&n^2 - n + k \mid n^2 - nk - (n^2 - n + k) = -nk + n - k,\\
&n^2 - n + k \mid nk - n + k.
\end{aligned}$$

Protože $k \geq 1$, tak $nk - n + k > 0$. Stejně tak $n^2 - n + k > 0$, takže musí platit nerovnost $n^2 - n + k \leq nk - n + k$, což je ekvivalentní $n^2 \leq nk$. To je ale ve sporu z dříve ukázanou nerovností $k < n$. Dospěli jsme tedy ke sporu, takže zadaným podmínkám vyhovuje pouze funkce $f(n) = n^3$.

Poznámky:

Všechna správná řešení se ubírala podobnou argumentací. Rozhodla jsem se udělovat poměrně štědrý bod za uhodnutí a ověření řešení. Dodejme ještě, že úloha se dá také vyřešit důkazem, kde se nejprve ukáže $f(n) = n^3$ jen pro prvočísla, a poté rozšířením na všechna přirozená čísla.

(Lenka Kopfová)

Úloha 8.

V rovině je dána mřížka tvořená $n \times n$ *body, kde* $n \geq 2$. *Marian by chtěl nakreslit lomenou čáru*[3] *procházející všemi body této mřížky. Kolik nejméně úseček musí takovou lomenou čáru tvořit?*

(Josef Minařík)

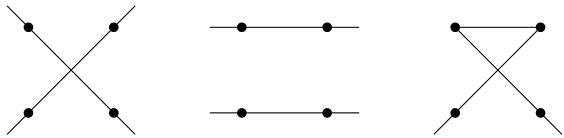
[2] Viz např. *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nicomachus_theorem_3D.svg.*

[3] *Lomená čára* je tvořena několika na sebe navazujícími úsečkami.

Řešení:

Ukážeme, že pro $n = 2$ Marian potřebuje 3 úsečky a pro $n \geq 3$ jich potřebuje $2n - 2$.

Nejprve vyřešme případ $n = 2$. Pokud by stačily 2 úsečky, musí každá z nich obsahovat 2 body. Pak jsou ale buď rovnoběžné, nebo se protínají uprostřed. Ani v jednom případě netvoří lomenou čáru. Pro 3 úsečky snadno najdeme konstrukci.



Nechť nyní $n \geq 3$. Ukažme, že méně než $2n - 2$ úseček nestačí.

Rozdělme úsečky na vodorovné (rovnoběžné s řádky tabulky), svislé (rovnoběžné se sloupci) a šikmé (všechny ostatní). Počet vodorovných označme v, počet svislých s. Rozeberme 3 případy podle velikostí v a s:

(1) Nechť $v \geq n$. Pak jsme využili alespoň n vodorovných úseček. Žádné 2 z nich se neprotínají, tedy bylo třeba ještě alespoň $n - 1$ dalších úseček, které je pospojují. Celkem tedy je zapotřebí alespoň $2n - 1$ úseček. Obdobně můžeme jejich počet odhadnout pokud $s \geq n$.

(2) Nechť $v = n - 1$. Pak v jednom řádku není žádná vodorovná úsečka. Všech n bodů v tomto řádku tedy musí protínat svislé a šikmé úsečky. Každá taková však protne nejvýše jeden z těchto bodů, tudíž jich musí být alespoň n. Opět potřebujeme alespoň $2n - 1$ úseček. Analogicky můžeme postupovat i pro $s = n - 1$.

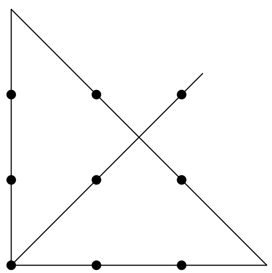
(3) Nechť $v < n - 1$ a $s < n - 1$. Pak máme $n - v$ řádků bez vodorovné úsečky a $n - s$ sloupců bez svislé úsečky. Podívejme se na $(n - v)(n - s)$ bodů v jejich průniku. Ty tvoří nějaký obdélník, přičemž nás zajímají body na jeho okraji.

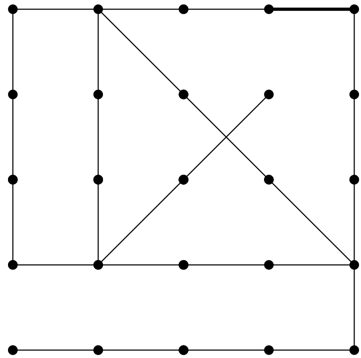
   Těch je $2n - 2v + 2n - 2s - 4$. Prostě spočteme body na hraničních úsečkách a odečteme vrcholy, které jsme započítali dvakrát. Všechny tyto body musí být pokryty šikmými úsečkami. Ovšem každá šikmá úsečka protíná nejvýše 2 z nich. Tedy potřebujeme alespoň $2n - v - s - 2$ šikmých úseček. K tomu máme v vodorovných a s svislých, celkem tedy alespoň $2n - 2$ úseček.

Zbývá nám ukázat, že $2n - 2$ úseček nám stačí. Ukažme dokonce silnější tvrzení, že nám stačí $2n - 2$ úseček tak, že první z nich začíná v levém spodním rohu a vede vodorovně doprava.

Pro $n = 3$ to jistě platí, stačí postupovat jako na obrázku dole.

Dále postupujme indukcí. Nechť tvrzení platí pro $n - 1$. Uvažme tabulku $n \times n$. Začneme v levém spodním rohu. První úsečkou spojíme oba spodní rohy, druhou pak oba pravé. Použili jsme 2 úsečky a zbývá nám oblast $(n - 1) \times (n - 1)$. Tu už umíme z indukčního předpokladu spojit pomocí $2(n - 1) - 2$ úseček. Stačí řešení pro $n - 1$ otočit o $180°$. Jistě pak můžeme první úsečku tohoto řešení trochu protáhnout, aby navázala na druhou již nakreslenou úsečku. Máme tedy konstrukci pro n s použitím $2n - 4 + 2 = 2n - 2$ úseček.





Poznámky:

Všechna úspěšná řešení postupovala stejně jako vzorové. Velká část řešitelů ovšem řekla, že nejlepší je vzít n vodorovných úseček, které spojím $n-1$ svislými, takže potřebuji $2n-1$ úseček. To nejen že není pravda, ale i kdyby to bylo správně, za takové prohlášení bez důkazu by nebylo mnoho bodů. *(Václav Janáček)*