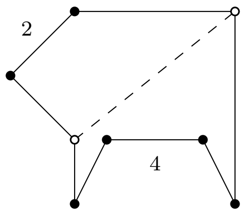
Kombinatorická geometrie 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE	TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. PROSINCE 2022

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
V rovině leží shodné mnohoúhelníky A a B tak, že každý vrchol A leží uvnitř nebo na obvodu B. Musí všechny vrcholy A a B splývat?

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
V rovině je n modrých a n červených přímek, přičemž žádná dvojice z nich není rovnoběžná. Dokažte, že existuje kružnice, na níž leží právě $2n-1$ bodů z modrých přímek a právě $2n-1$ bodů z červených přímek.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Pro $n \geq 4$ nazveme vnitřní[1] diagonálu n-úhelníku *dělící*, jestliže se po smazání jejích koncových vrcholů obvod n-úhelníku rozpadne na dvě části, z nichž každá má alespoň $\frac{n}{3}-1$ vrcholů. Dokažte, že každý n-úhelník má dělící diagonálu.



[1] Diagonálu nazýváme vnitřní, jestliže až na krajní body leží celá uvnitř mnohoúhelníku.

Kombinatorická geometrie 1

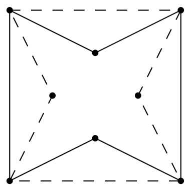
1. seriálová série Vzorové řešení

Úloha 1.

V rovině leží shodné mnohoúhelníky A a B tak, že každý vrchol A leží uvnitř nebo na obvodu B. Musí všechny vrcholy A a B splývat? *(Majda Mišinová)*

Řešení:

Vrcholy obecně splývat nemusí. Protipříkladem může být čtverec s vyříznutými tupoúhlými trojúhelníky na protějších stranách jako na obrázku.



Poznámky:

Mnoho řešitelů se snažilo tvrdit, že vrcholy splývat musí. Obvykle argumentovali rovností obsahů. To ovšem funguje jenom pro konvexní mnohoúhelníky. Konstrukce protipříkladu byly různé, často podobné vzorovému řešení. *(Pepa Minařík)*

Úloha 2.

V rovině je n modrých a n červených přímek, přičemž žádná dvojice z nich není rovnoběžná. Dokažte, že existuje kružnice, na níž leží právě $2n-1$ bodů z modrých přímek a právě $2n-1$ bodů z červených přímek. *(Majda Mišinová)*

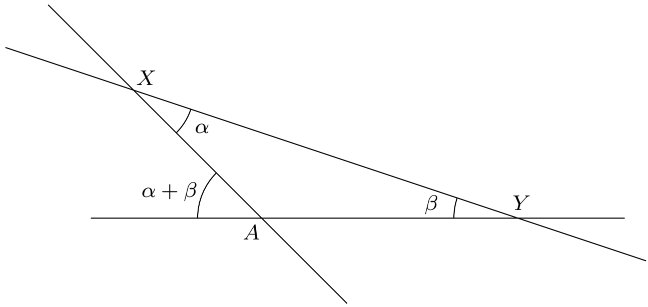
Řešení:

Nejprve si rozmyslíme, co po nás úloha vlastně chce. Kdyby se kružnice protínala s každou přímkou dvakrát a neprocházela by žádným průsečíkem, leželo by na ní $2n$ bodů z modrých přímek a $2n$ bodů z červených. Naším cílem bude najít jednu modrou a jednu červenou přímku, jichž se bude kružnice dotýkat. Zbylé by měla protínat ve dvou bodech.

Ze všech n^2 dvojic tvořených modrou přímkou a červenou přímkou vybereme tu dvojici, která svírá nejmenší úhel. Naší dvojici přímek označíme m a c. Hledanou kružnici umístíme do jednoho ze dvou tupých úhlů mezi m a c. Označme tento úhel φ. Ukažme, že každá další zadaná přímka protíná ramena φ právě jednou.

Pro spor předpokládejme, že je nějaká přímka p protínající ramena dvakrát v bodech X a Y. Označme průsečík m a c jako A. Potom ostrý úhel mezi m a c je roven $|\sphericalangle AXY| + |\sphericalangle AYX|$, oba tyto úhly tedy musejí být menší než ostrý úhel mezi m a c. Ať už je p červená nebo modrá, m a c

nesvírají nejmenší úhel ze všech dvojic červená přímka a modrá přímka, což je spor s tím, jak jsme si je vybrali.

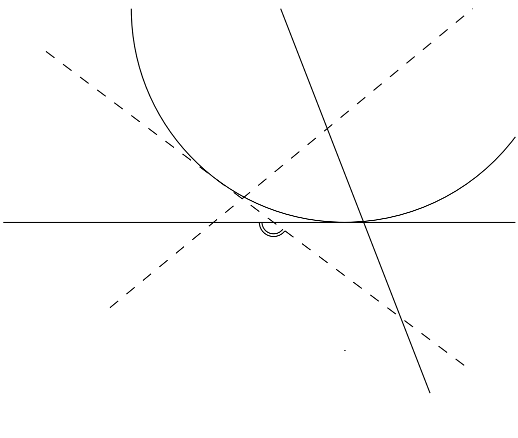


Každé dvě zadané přímky se protínají. Takže kdyby p neprotínala ramena φ ani v jednom bodě, musí protínat dvakrát ramena opačného úhlu. Potom dostaneme spor úplně stejně, jako v předchozím případě.

Tímto jsme skoro hotovi. Myšlenka zbytku řešení je zkonstruovat kružnici „dostatečně daleko“, aby protínala všechny přímky kromě m a c právě ve dvou bodech a neprocházela žádným průsečíkem.

Všimněme si, že zadané přímky mají pouze konečný počet průsečíků. Umíme tedy přímkou rozdělit úhel φ na dvě části, z nichž jedna bude nekonečná a v ní i na její hranici nebudou žádné průsečíky zadaných přímek. Umíme zařídit, aby naše kružnice byla mimo trojúhelník, který tato přímka vytíná v úhlu φ (bude to například kružnice připsaná tomuto trojúhelníku). Tím zařídíme, že kružnice nebude procházet žádným průsečíkem dvou zadaných přímek.

Ukažme, že je splněna i první podmínka, tedy že každá přímka mimo m a c protíná kružnici ve dvou místech. Označme body dotyku nalezené kružnice s rameny φ jako D a E. Nechť přímka p protíná jedno z ramen φ v bodě X. Z konstrukce kružnice leží X mezi A a D nebo mezi A a E. Protože přímka p protíná vnitřek trojúhelníku ADE, musí protínat jeho obvod ve dvou bodech. Jeden z nich je X, takže druhý musí být uvnitř úsečky DE, jinak by p znova protínala ramena φ. Celý vnitřek DE leží uvnitř kružnice, takže p protíná její vnitřek a musí protínat také její obvod ve dvou bodech.

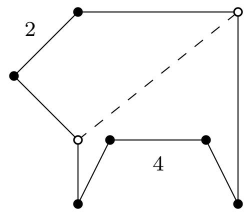


Poznámky:
Uvědomit si, že kružnice se má dvou přímek dotýkat a zbylé protínat, a zkusit nějaký extremální princip zvládli téměř všichni řešitelé. Avšak najít správný extremální princip už bylo problematičtější. Častou chybou bylo snažit se hledat „nejhornější“, „nejspodnější“, „nejlevější“ nebo „nejpravější“ přímku, což ale není dobře definované a kromě toho to nefunguje.

Alternativní řešení, které je ale v podstatě stejné jako vzorové, je představit si, že se na přímky díváme „z velké dálky“. Potom se přímky protínají vlastně v jednom bodě. Tento případ je už snadné vyřešit. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha 3.

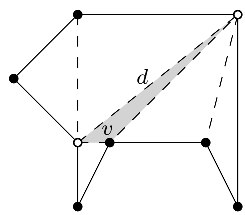
Pro $n \geq 4$ nazveme vnitřní[1] *diagonálu n-úhelníku dělící, jestliže se po smazání jejích koncových vrcholů obvod n-úhelníku rozpadne na dvě části, z nichž každá má alespoň $\frac{n}{3} - 1$ vrcholů. Dokažte, že každý n-úhelník má dělící diagonálu.*



(Majda Mišinová)

Řešení:
Ze seriálu víme, že každý mnohoúhelník má aspoň jednu triangulaci. Uvažme tedy libovolnou triangulaci našeho mnohoúhelníku, ukážeme, že vyhovuje některá z jejích úhlopříček. V seriálu jsme si také ukázali, že každá triangulace tvoří strom, jehož vrcholy jsou trojúhelníky a hrany vedou mezi trojúhelníky sdílejícími stranu. Označme strom odpovídající naší triangulaci T a všimněme si, že má $n - 2$ vrcholů.

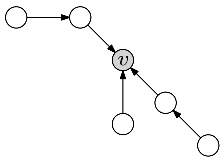
Nyní předpokládejme, že ve stromě T existuje vrchol v, po jehož odstranění se T rozpadne na části o velikosti nejvýše $\frac{|T|}{2} = \frac{n-2}{2}$. Vrcholy stromu T mají stupeň nejvýše 3, takže po odstranění v by jedna z částí měla aspoň $\frac{|T|-1}{3} = \frac{n-3}{3} = \frac{n}{3} - 1$ vrcholů. Uvažme hranu vedoucí z v do největší části, ta odpovídá nějaké diagonále v původním mnohoúhelníku. Označme ji d. Diagonála d je dělící. Na jedné straně od d je aspoň $\frac{n}{3} - 1$ trojúhelníků triangulace, takže tam také je aspoň $\frac{n}{3} - 1$ vrcholů. Zároveň je na této straně nejvýše $\frac{n-2}{2}$ vrcholů, takže na té druhé od d je vrcholů aspoň $n - 2 - \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1 > \frac{n}{3} - 1$.



Zbývá nám dokázat existenci vrcholu v s požadovanou vlastností. Takovému vrcholu se říká *centroid*, protože je v jistém smyslu „uprostřed“ stromu. Důkaz jeho existence není obtížný. Každou

[1] Diagonálu nazýváme vnitřní, jestliže až na krajní body leží celá uvnitř mnohoúhelníku.

hranu stromu T orientujme tak, aby ukazovala ve směru, kde je více vrcholů. Jestliže je v obou směrech vrcholů stejně, můžeme ji orientovat libovolně. Strom T má $|T|$ vrcholů, ale jenom $|T|-1$ hran, takže z nějakého vrcholu v nemůže vést žádná hrana (všechny musí být orientované směrem k němu). To znamená, že po odstranění v se T rozpadne na části, z nichž žádná nemá více než polovinu vrcholů.



Poznámky:

Přibližně polovina správných řešení postupovala jako to vzorové za použití triangulace a vrcholu nebo hrany „uprostřed“ stromu. Zbytek buď využíval indukcí nebo z mnohoúhelníku postupně odřezával menší mnohoúhelníky. *(Pepa Minařík)*