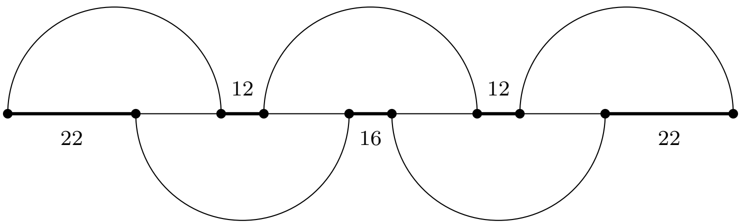
Průměry

1. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. ÚNORA 2023

Jsou-li dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, potom jako jejich aritmetický průměr označujeme číslo $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ navíc kladná, pak jako jejich geometrický průměr označujeme číslo $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Pět shodných půlkružnic s průměrem d je přiloženo na přímku tak, jak ukazuje obrázek. Určete d, znáte-li délky úseček zvýrazněných na obrázku. (Obrázek je pouze orientační a nezobrazuje přesné délky.)



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Je dáno přirozené číslo n. Určete geometrický průměr jeho kladných dělitelů.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 2023$. Radek může v jednom kroku smazat dvě čísla a místo nich napsat jejich aritmetický průměr. Může postupovat tak, aby nakonec zbylo na tabuli jako jediné číslo 2? A může postupovat tak, aby nakonec zbylo číslo 1000?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Řekneme, že neprázdná konečná množina přirozených čísel je *sladká*, je-li aritmetický průměr jejích prvků celočíselný. Pro přirozené číslo n označme jako s_n počet všech sladkých podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že $s_n - n$ je sudé číslo.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je permutace čísel od 1 do n. Dvojici indexů $i < j$ nazveme *veselou*, pokud aritmetický průměr čísel a_i a a_j není roven žádnému a_k pro k splňující $i < k < j$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje permutace, v níž je každá dvojice indexů $i < j$ veselá.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Jsou dána reálná čísla x, y, z taková, že $1 \neq x \neq y \neq 1$, a označíme

$$a_1 = \frac{yz - x^2}{1 - x}, \qquad a_2 = \frac{xz - y^2}{1 - y}, \qquad a_3 = x + y + z.$$

Víte-li navíc, že $a_1 = a_2$, určete hodnotu $\frac{A(a_1,a_2,a_3)}{A(x,y,z)}$, kde $A(k, \ell, m)$ značí aritmetický průměr čísel k, ℓ, m.

Úloha 7. (5 bodů)

Diana dostala posloupnost celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ a rozhodla se, že ji postupně prodlouží na nekonečnou posloupnost: V každém kroku uváží svou dosavadní posloupnost $a_1, \ldots, a_n$ a zvolí nejmenší přirozené číslo $m \leq n$ takové, že aritmetický průměr čísel $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ je celočíselný. Následně za a_{n+1} zvolí tento aritmetický průměr. Dokažte, že od nějakého indexu t už budou všechna a_i pro $i \geq t$ stejná.

Úloha 8. (5 bodů)

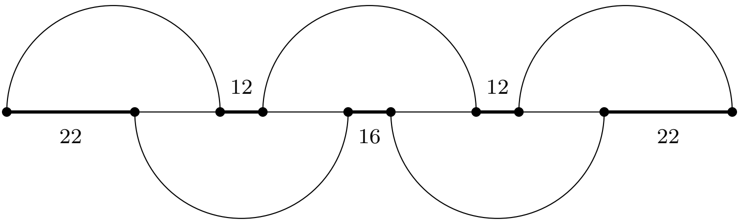
Trojici reálných čísel $a < b < c$ označíme jako *pěknou*, je-li b aritmetickým průměrem a a c. Anička obdržela $2k + 1$ různých reálných čísel, mezi nimiž nalezla alespoň k^2 pěkných trojic. Dokažte, že dovede tato reálná čísla rozdělit na dvě disjunktní aritmetické posloupnosti.

Průměry

1. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1.

Pět shodných půlkružnic s průměrem d je přiloženo na přímku tak, jak ukazuje obrázek. Určete d, znáte-li délky úseček zvýrazněných na obrázku. (Obrázek je pouze orientační a nezobrazuje přesné délky.)



(Marian Poljak)

Řešení:
Pozrieme sa na hornú časť, kde sa nachádzajú 3 polkružnice s priemerom d a dve úsečky dĺžky 12. Dĺžka ℓ určená priemermi týchto polkružníc a úsečkami je rovná

$$\ell = 3d + 2 \cdot 12 = 3d + 24.$$

Túto dĺžku ℓ vieme určiť aj tak, že sa pozrieme na spodnú časť. Tam sa nachádzajú 2 polkružnice s priemerom d, dve úsečky dĺžky 22 a jedna úsečka dĺžky 16. Dĺžku ℓ vieme preto vyjadriť nasledovne:

$$\ell = 2d + 2 \cdot 22 + 16 = 2d + 60.$$

Z týchto dvoch rovností dostávame, že platí $3d + 24 = \ell = 2d + 60$, a teda priemer polkružníc je $d = 36$.

Poznámky:
Všetky riešenia boli správne a väčšina z nich postupovala ako vzorové riešenie. *(Michal Pecho)*

Úloha 2.

Je dáno přirozené číslo n. Určete geometrický průměr jeho kladných dělitelů. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:
Uvažme množinu všech kladných dělitelů čísla n. Potom pro každé i takové, že i dělí n, existuje právě jedno j, že $i \cdot j = n$. Potom i j je dělitelem n.

Pokud n není druhou mocninou přirozeného čísla, platí, že i a j jsou vždy různá. Dělitelé n tak tvoří dvojice (i, j) takové, že jejich součin je roven n. Nečtvercové číslo tak má sudý počet dělitelů, který označíme $2k$. Součin těchto dělitelů je potom n^k, protože každá dvojice dělitelů přispívá násobkem n a těchto dvojic je k. Geometrický průměr těchto $2k$ čísel je tak $\sqrt[2k]{n^k} = \sqrt{n}$.

Pokud je n druhou mocninou přirozeného čísla, potom má dělitele $\sqrt{n}$, který v množině dělitelů nemá dvojici. Ostatní dělitelé tvoří dvojice jako v předchozím případě. Dělitelů čísla n je tak $2k+1$ a jejich součin je $n^k \cdot \sqrt{n}$. Geometrický průměr je tak

$$\sqrt[2k+1]{n^{k+1/2}} = \sqrt{n}.$$

Geometrický průměr všech kladných dělitelů čísla n je tak roven $\sqrt{n}$.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla zcela správně, některá z nich opomněla případ, kdy je n čtvercové. Několik řešení si s tímto okrajovým případem poradilo malým tríčkem – použitím druhé mocniny součinu všech dělitelů. Potom každý dělitel měl svůj doplněk, se kterým dával součin n.

(Klárka Grinerová)

Úloha 3.

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 2023$. *Radek může v jednom kroku smazat dvě čísla a místo nich napsat jejich aritmetický průměr. Může postupovat tak, aby nakonec zbylo na tabuli jako jediné číslo* 2*? A může postupovat tak, aby nakonec zbylo číslo* 1000*?* (Radek Olšák)

Řešení:

Čísla 2 i 1000 dostat můžeme. Zaveďme si průměrování seshora. Udělejme průměr 1. a 3. největšího čísla, čímž nám vznikne 2. největší číslo. Nyní máme dvě 2. největší čísla, jež zprůměrujeme na jedno. Teď budeme průměrovat vždy dvě největší čísla posloupnosti, potom bude platit, že dvě největší čísla jsou o 1 menší, než byla dvě největší čísla původně, tzn. $(n-3, n-2, n \rightarrow n-3, n-1)$. Analogicky můžeme zavést průměrování zezdola.

Abychom se dostali k číslu 2 budeme průměrovat seshora.

$$1, 2, \ldots, 2020, 2021, 2022, 2023 \;\rightarrow\; 1, 2, \ldots, 2020, 2022, 2022 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 1, 2, \ldots, 2020, 2022 \;\rightarrow\; 1, 2, \ldots, 2019, 2021 \;\rightarrow\; \ldots \;\rightarrow\; 1, 2, 4 \;\rightarrow\; 1, 3 \;\rightarrow\; 2.$$

Pro číslo 1000 využijeme průměrování seshora i zezdola.

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2020, 2021, 2022, 2023 \;\rightarrow\; 2, 2, 4, \ldots, 2020, 2022, 2022 \rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2, 4, \ldots, 2020, 2022 \;\rightarrow\; 3, 5, \ldots, 2019, 202 \;\rightarrow\; \ldots \;\rightarrow\; 998, 1000, 1002 \;\rightarrow\; 1000, 1000 \;\rightarrow\; 1000.$$

Poznámky:

Velká část řešení byla správně. Ta řešení, která správně nebyla, buď měla správné úvahy, ale nějaké drobné nepřesnosti, chyběla v nich odpověď na druhou otázku s číslem 1000, nebo bylo pomocí nějakých chyb v úvahách dokazováno, že se k nějakému z čísel dostat nejde. U správných řešení byl postup pro číslo 2 v podstatě vždy stejný. Pro číslo 1000 se objevilo více postupů. První je uvedený ve vzorovém řešení. Druhým bylo převedení na posloupnost $2, 4, \ldots, 1996, 1998$, následné zprůměrování všech prvků (vždy první a poslední prvek) na 1000 a dále zprůměrování všech 1000 na jedno číslo 1000. Třetím způsobem bylo použití magie, která překvapivě fungovala. Dále se jako důkaz občas objevovalo, že v takovéto posloupnosti čísel se můžeme dostat průměrováním na jakékoliv z nich, kromě největšího a nejmenšího. *(Anna Marie Minarovičová)*

Úloha 4.

Řekneme, že neprázdná konečná množina přirozených čísel je sladká, je-li aritmetický průměr jejích prvků celočíselný. Pro přirozené číslo n označme jako s_n počet všech sladkých podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že $s_n - n$ je sudé číslo. *(Marian Poljak)*

Řešení:

Nejprve si povšimněme, že jelikož budou všechny prvky mezi čísly $1, \ldots, n$, bude mezi nimi i jejich aritmetický průměr.

Rozdělme si nyní sladké podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na tři skupiny:

(1) V první skupině budou jednoprvkové podmnožiny. Jelikož aritmetický průměr jednoho čísla je číslo samo, všechny jednoprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ budou sladké a v této skupině jich tudíž bude n.

(2) Do druhé skupiny vložíme všechny sladké podmnožiny, které mají alespoň dva prvky a neobsahují svůj aritmetický průměr. Tedy může tam být například množina $\{1, 3\}$, ale nikoliv množina $\{1, 2, 3\}$.

(3) Do třetí skupiny umístíme zbylé sladké podmnožiny, tedy ty, které obsahují svůj aritmetický průměr a mají alespoň dva prvky. (Dokonce musí mít alespoň tři prvky, neboť aritmetický průměr každých dvou různých prvků bude vždy od obou různý.)

Všimněme si, že takto jsme opravdu rozdělili všechny sladké podmnožiny beze zbytku (neboť v první skupině jsou všechny jednoprvkové, a jelikož aritmetické průměry sladkých podmnožin jsou celočíselné, víceprvkové množiny jistě průměr buď obsahují, nebo ne).

Jak už jsme výše zmínili, v první skupině je přesně n prvků, tedy $s_n - n$ je počet sladkých podmnožin v druhé a třetí skupině dohromady. Chtěli bychom, aby byl sudý, hodilo by se, kdyby se prvky v nich daly nějak spárovat (neboli bychom chtěli dokázat, že v obou skupinách bude množin stejně).

Všimněme si, že přidáme-li do množiny z druhé skupiny její průměr, aritmetický průměr nově vzniklé množiny se nezmění:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}{i} = p,$$
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_i + p}{i + 1} = \frac{i \cdot p + p}{i + 1} = p.$$

Vezměme si zobrazení, které každé množině z druhé skupiny přiřadí množinu ze třetí skupiny se stejnými prvky a aritmetickým průměrem navíc. Každá množina z druhé skupiny je sladká, pak bude sladká i množina, která je jejím obrazem.

Zřejmě můžeme obdobně zkonstruovat jednoznačně určenou sladkou množinu z druhé skupiny odebráním aritmetického průměru z množiny ze třetí skupiny. Jediný problém by nastal, kdybychom po odebrání průměru měli množinu o méně než dvou prvcích, což však nenastane nikdy, neboť všechny množiny ze třetí skupiny mají alespoň tři prvky.

Máme tedy zobrazení, které každé množině z druhé skupiny přiřadí jednoznačnou množinu z třetí skupiny, a i zobrazení k němu inverzní, které každé množině z třetí skupiny přiřadí jednoznačnou množinu z druhé.

Získali jsme tedy bijekci mezi těmito skupinami, takže víme, že mají stejný počet prvků. Tedy $s_n - n$ je opravdu sudé číslo.

Poznámky:

Naprostá většina řešitelů dospěla ke správnému závěru. Mnozí postupovali obdobně jako ve vzorovém řešení, mnohdy však dokázali pouze jeden směr zobrazování množin na sebe. Jelikož stačilo opačný směr pouze okomentovat, strhávala jsem za to pouze jeden bod. Jiná řešení v zobrazení množin prohazovala prvky a_i a $n - a_i$ a počítala překrývající se množiny.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 5.

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je permutace čísel od 1 do n. Dvojici indexů $i < j$ nazveme veselou, pokud aritmetický průměr čísel a_i a a_j není roven žádnému a_k pro k splňující $i < k < j$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje permutace, v níž je každá dvojice indexů $i < j$ veselá.

(Magdaléna Mišinová)

Řešení:
Budeme postupovat indukcí. Začneme tím, že tvrzení dokážeme pro $n = 1$. V tomto případě má permutace právě jeden prvek, a je tedy zřejmě veselá.

Nyní dokážeme indukční krok. Předpokládejme, že $n > 1$ a z indukčního předpokladu existuje hezká permutace čísel $\{1, \ldots, k\}$ pro libovolné $k < n$. Díky $n > 1$ platí $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil < n$, tudíž můžeme uvážit veselou permutaci $b_1, \ldots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ čísel od 1 do $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a veselou permutaci $c_1, \ldots, c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ čísel od 1 do $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Uvažme potom posloupnost

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 2c_1 - 1, 2c_2 - 1, \ldots, 2c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 1\right).$$

Ukážeme, že tato posloupnost je veselou permutací čísel od 1 do n. Skutečně se jedná o permutaci, neboť každé sudé číslo mezi 1 a n je tvaru $2k$ pro jednoznačně dané celé $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a každé liché číslo je tvaru $2l - 1$ pro celé $1 \leq l \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, takže se v posloupnosti nejprve objeví všechna sudá čísla (první polovina), a pak všechna lichá (druhá polovina).

Zbývá tedy ověřit veselost naší permutace. Zvolíme-li prvek a_i z první poloviny a prvek a_j z druhé poloviny, pak jejich součet musí být lichý, takže jejich aritmetický průměr není celý, a nemůže tak být roven žádnému a_k pro $i < k < j$. Pokud jsou oba prvky a_i, a_j zvoleny z první poloviny, potom platí $i < j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a $a_i = 2b_i$, $a_j = 2b_j$. Kdyby existoval index k takový, že $i < k < j$ a $a_k = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$, tak bychom kvůli $a_k = 2b_k$ měli i $b_k = \frac{1}{2}(b_i + b_j)$, což je ovšem spor s veselostí $b_1, \ldots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Analogicky můžeme vyloučit i případ, kdy obě čísla leží ve druhé polovině posloupnosti, tentokrát skrze vyjádření $a_i = 2c_{i - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1$ pro $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Rozborem tří případů jsme tedy dokázali, že každá dvojice indexů $i < j$ je veselá, takže i celá výsledná permutace je veselá a indukční krok je dokončen.

Poznámky:
Většina řešení postupovala obdobně. Bohužel mnoho řešení mělo důkaz vystavěno poněkud nešťastně a často se jednotlivé argumenty slévaly do sebe. Občas některá tvrzení nebyla dostatečně odůvodněna. To se týká obzvláště toho, že se permutace opravdu nerozbije pří násobení a sčítání.

Bodovaní bylo následující:

- 1 až 2 body za popis algoritmu k sestrojení vhodné permutace,
- 3 body, pokud se řešitel pokusil dokázat korektnost daného algoritmu a příslušý důkaz byl správný z větší části,
- 4 body, pokud daný důkaz obsahoval jen drobné chyby,
- 5 bodů za úplné řešení.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 6.

Jsou dána reálná čísla x, y, z taková, že $1 \neq x \neq y \neq 1$, a označíme

$$a_1 = \frac{yz - x^2}{1 - x}, \qquad a_2 = \frac{xz - y^2}{1 - y}, \qquad a_3 = x + y + z.$$

Víte-li navíc, že $a_1 = a_2$, určete hodnotu $\frac{A(a_1, a_2, a_3)}{A(x, y, z)}$, kde $A(k, \ell, m)$ značí aritmetický průměr čísel k, ℓ, m.

(Natália Bátorová)

Řešení:
Zo zadania vyplýva

$$\begin{aligned}
a_1 - a_3 &= a_2 - a_3,\\
\frac{yz - x^2}{1-x} - (x+y+z) &= \frac{xz - y^2}{1-y} - (x+y+z),\\
\frac{yz - x^2 - x - y - z + x^2 + xy + xz}{1-x} &= \frac{xz - y^2 - x - y - z + xy + y^2 + yz}{1-y},\\
\frac{xy + xz + yz - (x+y+z)}{1-x} &= \frac{xy + xz + yz - (x+y+z)}{1-y}.
\end{aligned}$$

Ak by bol čitateľ nenulový, tak $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y}$, čo je spor s predpokladom $x \neq y$. Nutne je potom $xy + xz + yz = x + y + z$ a $a_1 - a_3 = 0 = a_2 - a_3$, a teda $a_1 = a_2 = a_3$.

Ak $a_3 = 0$, tak

$$0 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

z čoho vyplýva, že $x = y = z = 0$, ale to je opäť spor s predpokladom $x \neq y$, teda $a_3 \neq 0$. Nakoniec

$$\frac{A(a_1, a_2, a_3)}{A(x,y,z)} = \frac{a_3}{\frac{a_3}{3}} = 3.$$

Poznámky:
Mnohí riešitelia postupovali podobne alebo využili iné úpravy a triky, ktoré tiež viedli k správnemu riešeniu. Pri niektorých úpravách bolo treba overovať, či nedelíme nulou, a na to veľa riešiteľov zabudlo. Málokto na záver overil, či je vôbec výraz z úlohy definovaný, teda či $x + y + z \neq 0$, ale za to som nakoniec body nestŕhala. *(Natália Bátorová)*

Úloha 7.

Diana dostala posloupnost celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ a rozhodla se, že ji postupně prodlouží na nekonečnou posloupnost: V každém kroku uváží svou dosavadní posloupnost $a_1, \ldots, a_n$ a zvolí nejmenší přirozené číslo $m \leq n$ takové, že aritmetický průměr čísel $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ je celočíselný. Následně za a_{n+1} zvolí tento aritmetický průměr. Dokažte, že od nějakého indexu t už budou všechna a_i pro $i \geq t$ stejná. *(Marian Poljak)*

Řešení:
Když Diana zvolí číslo m, vznikne číslo a_{n+1} jako průměr čísel $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$, tedy

$$a_{n+1} = \frac{a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n}{n - m + 1}.$$

Všimneme si, že když k těmto číslům přidáme jejich průměr a_{n+1}, zůstane průměr stejný:

$$\begin{aligned}
\frac{a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n-m+2} &= \frac{(n-m+1)\cdot \frac{a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n}{n-m+1} + a_{n+1}}{n-m+2}\\
&= \frac{(n-m+1)\cdot a_{n+1} + a_{n+1}}{n-m+2}\\
&= \frac{(n-m+2)\cdot a_{n+1}}{n-m+2}\\
&= \frac{(n-m+2)\cdot a_{n+1}}{n-m+2} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Z toho lze vyvodit dvě věci. Zaprvé, že když Diana zvolí dvakrát za sebou stejné m, připíše k posloupnosti dvakrát stejné číslo. Zadruhé, že je takový průměr opět celočíselný, takže m vyhovuje Dianině podmínce. Z čehož plyne, že když hledá nejmenší m, zvolí buď stejné jako v předchozím kroku, nebo menší.

Posloupnost zvolených m je tak nerostoucí, ale m může nabývat jen konečně mnoha hodnot (od 1 do k, protože první m je od 1 do k a další m jsou nejvýše tolik, přičemž m musí být alespoň 1). Diana proto může m snížit jenom konečněkrát a potom už zůstane pořád stejné. A jak jsme viděli výše, pokud zvolí dvakrát za sebou stejné m, připíše dvakrát stejné číslo, takže jakmile bude volit stejné m pořád, bude psát pořád stejná čísla.

POZNÁMKY:
Naprostá většina řešení byla správná. Občas nebyla moc jasně rozlišená zmíněná dvě pozorování, za což jsem body nebral. Pár řešitelů se vydalo trochu jinou cestou a dokázalo, že jakákoliv změna m je možná jen konečně dlouho, což dovedlo být zamotané. *(Matouš Šafránek)*

Úloha 8.

Trojici reálných čísel $a < b < c$ označíme jako pěknou, je-li b aritmetickým průměrem a a c. Anička obdržela $2k+1$ různých reálných čísel, mezi nimiž nalezla alespoň k^2 pěkných trojic. Dokažte, že dovede tato reálná čísla rozdělit na dvě disjunktní aritmetické posloupnosti. (Radek Olšák)

ŘEŠENÍ:
Aniččina čísla označme jako

$$x_{-k} < x_{-k+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k$$

a jejich množinu jako $X = \{x_{-k}, \ldots, x_k\}$.

Nejprve ukážeme, že více než k^2 pěkných trojic mezi prvky X být nemůže, z čehož také vyplyne, jak tyto trojice musejí vypadat. Uvažujme nejprve nějaké x_{-k+i}, kde $i = 0, 1, \ldots, k-1$, což znamená, že bereme prvek „z nižší půlky“ množiny X. Pokud v pěkné trojici (a, b, c) je $b = x_{-k+i}$, pak musí být a nižší než x_{-k+i}. Přitom, jakmile je a určeno, je tím jednoznačně určena celá trojice. Takže x_{-k+i} se může vyskytovat jako b nanejvýš v tolika pěkných trojicích, kolik je v X nižších prvků – tedy nanejvýš i-krát. Obdobně se může x_{k-i}, kde $i = 0, 1, \ldots, k-1$ (prvek „z vyšší půlky“ X), vyskytnout jako b v pěkné trojici nanejvýš i-krát, zatímco prostřední prvek x_0 se může vyskytnout nanejvýš k-krát. Dohromady tak nemůžeme mít více než

$$0 + 1 + \cdots + (k-1) + k + (k-1) + \cdots + 1 + 0 = \frac{(k-1)k}{2} + k + \frac{(k-1)k}{2} = k^2$$

pěkných trojic.

To, že tento nejvyšší možný počet pěkných trojic skutečně nastal, znamená, že všechny možné pěkné trojice skutečně byly pěkné – tedy x_{-k+i} tvoří nějakou pěknou trojici s každým nižším prvkem a x_{k-i} tvoří nějakou pěknou trojici s každým vyšším prvkem. Konečně x_0 musí být obsaženo v k hezkých trojicích, které tak musí využít všechny prvky z nižší i vyšší půlky. Z jejich pořadí už je jasné, že se musí uspořádat do trojic tvaru (x_{-k+i}, x_0, x_{k-i}), takže bude platit $2x_0 = x_{-n} + -x_n$ pro každé $n = 1, 2, \ldots, k$.

Nyní si X BÚNO zkrášlíme. Na aritmetických průměrech, a tedy ani na pěkných trojicích, se nic nezmění, pokud celou X posuneme o konstantu. Můžeme tedy BÚNO uvažovat $x_0 = 0$, což znamená $x_{-n} = -x_n$ pro $n = 1, 2, \ldots, k$. Celá množina X je tedy symetrická podle nuly, takže nám bude stačit dívat se především na její kladnou část. Podobně se nic nezmění, pokud celou X přenásobíme nenulovou konstantou, takže můžeme BÚNO uvažovat $x_1 = 1$.

Dále se zaměřme na mezery mezi po sobě jdoucími čísly, tedy $x_{i+1} - x_i$. Pro $i \geq 0$ musí z našich předchozích pozorování existovat pěkná trojice tvaru (x_j, x_i, x_{i+1}) pro nějaké $j < i$. To však znamená $x_i - x_j = x_{i+1} - x_i$, tedy i

$$x_i - x_{i-1} \leq x_i - x_j = x_{i+1} - x_i.$$

Jinými slovy, když jdeme směrem k nule, mezery mezi po sobě jdoucími prvky X se nezvyšují. Pokud jsme si tedy BÚNO zvolili $x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$, všechny mezery musí být alespoň 1.

V následujícím kroku dokonce nahlédneme, že jediné možné délky mezer jsou 1 a 2. Pro mezeru těsně u x_0 to samozřejmě platí. Dále se podíváme na mezeru $x_i - x_{i-1}$ pro $i \in \{2, \ldots, k\}$. Číslo x_i musí tvořit hezkou trojici s $b = x_1$, takže pro jistý index j máme $x_i - x_1 = x_1 - x_j$, což se vzhledem k $x_1 = 1$ upraví na $x_j = 2 - x_i$. Jelikož k $i \geq 2$, máme $x_i \geq 2$ (všechny mezery jsou alespoň 1). Tedy $x_j \leq 0$. Pokud nastane rovnost $x_j = 0$, znamenalo to $x_i = 2$ a $i = 2$. Takže mezera $x_2 - x_1$, kterou jsme zkoumali, skutečně neměla jinou délku než 1 či 2. Dále tedy můžeme předpokládat $x_j < 0$, takže $j < 0$. Díky symetrii $x_{-n} = -x_n$ pak víme, že v X máme také číslo $x_{-j} = -x_j = x_i - 2$.

To znamená, že číslo o 2 nižší než x_i je prvkem X, takže mezera $x_i - x_{i-1}$ nemůže být vyšší než 2. Nemůže být také menší než 1, protože 1 je nejkratší mezera. Konečně, kdyby bylo $x_i - x_{i-1} = d$ pro nějaké $d \in (1, 2)$, nutně by to znamenalo $x_{i-2} \leq x_i - d - 1 < x_i - 2 < x_i - d = x_{i-1}$, takže $x_{i-2} < x_{-j} < x_{i-1}$, což není možné, protože x_{i-2} a x_{i-1} jsou po sobě jdoucí prvky X. Jelikož jsme tedy vyčerpali všechny ostatní možnosti, nutně musí být $x_i - x_{i-1} \in \{1, 2\}$. Toto jsme ověřili pro $i > 0$ a ze symetrie musí totéž platit i pro $i \leq 0$.

Shrňme naše poznatky o X. Začneme-li v $x_0 = 0$ a půjdeme v X nahoru či dolů, budeme nejprve skákat vždy o 1 a později možná délka skoků vzroste na 2. Pokud tedy $x_i - x_{i-1} = 1$ pro $i = 1, \ldots, a$ a následně $x_i - x_{i-1} = 2$ pro $i = a + 1, \ldots, k$, můžeme z X vybrat aritmetickou posloupnost s diferencí 2 v podobě

$$A = \{x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_{-a-1}, x_{-a}, x_{-a+2}, \ldots, x_{a-2}, x_a, x_{a+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k\}.$$

Podle parity čísel k a a buďto v této množině bude ležet x_0, anebo x_{-1} a x_1 – na tom nám nezáleží. Tímto způsobem pokryjeme celou část X s mezerami 2 a některé prvky z té části, kde jsou mezery 1. Přesněji z části s mezerami 1 vybereme každý druhý prvek, takže zbude opět aritmetická posloupnost s diferencí 2 začínající prvek x_{-a+1} a končící prvkem x_{a-1}.

Pokud by se stalo, že $a = k$, pak je už sama X aritmetickou posloupností s diferencí 1, kterou snadno rozdělíme na dvě střídající se aritmetické posloupnosti s diferencí 2.

Poznámky:
Většina řešení postupovala v zásadě stejně jako to vzorové. Někteří mylně tvrdili, že Aniččina čísla musí být uspořádána v jediné aritmetické posloupnosti. Nicméně to, že aritmetická posloupnost dá správný počet pěkných trojic, nijak neimplikuje, že nearitmetická posloupnost jich dá ostře méně. To je ostatně dosvědčeno např. pro $k = 2$ pěticí čísel -3, -1, 0, 1, 3. *(Matěj Doležálek)*