Finální myš-maš

4. jarní série Termín odeslání: 9. května 2022

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

(a) Michal namaloval nedegenerovaný trojúhelník ABC s délkami stran $a \leq b \leq c$. Všiml si, že tři štětce, které použil, mají přesně délky jednotlivých výšek v trojúhelníku ABC. Když se však z těchto štětců pokusil složit nedegenerovaný trojúhelník, zjistil, že to nejde. Dokažte, že pak už musí platit nerovnost $b^2 > ac$. (2 body)

(b) Malíř Dláža namaloval pravidelný $(2n+1)$-úhelník. Malířky Klátra a Klárka hrají hru, při níž se střídají v tazích a Klátra začíná. Ve svém tahu namalují dosud nenamalovanou úhlopříčku $(2n+1)$-úhelníku, která protne sudý počet již namalovaných úhlopříček ve vnitřních bodech. Malířka, která nemůže táhnout, prohrává. Zjistěte v závislosti na n, kdo má vyhrávající strategii. (3 body)

Úloha 2.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n má n^2 více dělitelů dávajících zbytek 1 po dělení čtyřmi než dělitelů dávajících zbytek 3 po dělení čtyřmi. (2 body)

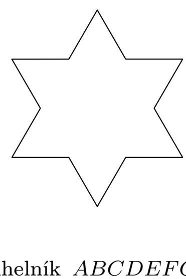
(b) Nechť $n \geq 2$ a uvažujme kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ukažte, že platí $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq 4\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. (3 body)

Úloha 3.

(a) Rozdělte pravidelnou šesticípou hvězdu třemi rovnými řezy na čtyři části, ze kterých je možné složit konvexní mnohoúhelník. Šesticípá hvězda je tvořena šestiúhelníkem, nad jehož stranami jsou rovnostranné trojúhelníky. (2 body)



(b) Mějme ne nutně konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$ se všemi stranami stejně dlouhými takový, že $ACEG$ je rovnoběžník, body B, D leží uvnitř $ACEG$ a body F, H venku. Dokažte, že body B, D, F a H leží na jedné kružnici. (3 body)

Úloha 4.

(a) Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty splňující $P(-2) = P(2) = 2$. Ukažte, že P nemá celočíselný kořen. (2 body)

(b) Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty, jehož každý komplexní kořen je celé číslo a který splňuje $P(0) = 1$, $P(5) = 3456$. Jaký nejmenší stupeň může mít P? (3 body)

Úloha 5.

(a) Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z), jež splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy &= z - x - y, \\ yz &= x - y - z, \\ zx &= y - z - x. \end{aligned}$$

(2 body)

(b) Daník našel v lese n-tici kartiček s přirozenými čísly $x_1, \ldots, x_n$, jejichž součet je $2n - 1$. Tyto kartičky potom rozdělil na dvě hromádky A a B se součty po řadě S_A a S_B. V závislosti na hodnotách čísel $x_1, \ldots, x_n$ určete, jaké nejvyšší hodnoty mohl dosáhnout výraz $S_A \cdot S_B$.

(3 body)

Úloha 6.

(a) Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takové, že $m^3 - n$ je násobkem $m^2 - n$, zatímco $n^3 - m$ je násobkem $n^2 - m$. (2 body)

(b) Nechť L je množina všech lichých přirozených čísel. Najděte všechny funkce f z L do L takové, že pro všechny dvojice $x, y \in L$ je $xy + 1$ násobkem $f(x) + f(y)$. (3 body)

Úloha 7.

(a) Je dána 2022-prvková množina M reálných čísel taková, že pro libovolná $a, b \in M$ je $a^2 + b\sqrt{2}$ racionální číslo. Dokažte, že pro každé $a \in M$ je rovněž $a\sqrt{2}$ racionální. (2 body)

(b) Kladná reálná čísla a, b, c splňují $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}.$$

(3 body)