

# Matematická indukce 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. DUBNA 2022

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)  
Nechť  $d$  je největší společný dělitel přirozených čísel  $m_1$  a  $m_2$ . Dokažte, že pokud je  $n$  přirozené číslo různé od nuly, je  $nd$  největším společným dělitelem čísel  $nm_1$  a  $nm_2$ . V důkazu vycházejte jen z definic a tvrzení ze seriálu.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)  
Ukažte, že pro kladná celá čísla  $a, b$  platí rovnost

$$\text{NSD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{NSD}(a,b)} - 1,$$

kde  $\text{NSD}(x, y)$  je největší společný dělitel čísel  $x, y$ .

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)  
Nechť  $a$  a  $b$  jsou kladná celá čísla. Definujme tento algoritmus.

Začneme s dvojicí  $(a, b)$ . Dokud  $a > 0$ , budeme provádět následující krok:

- (1) Pokud  $a < b$ , pak dvojici  $(a, b)$  nahradíme dvojicí  $(2a, b - a)$ .
- (2) Pokud  $a \geq b$ , pak dvojici  $(a, b)$  nahradíme dvojicí  $(a - b, 2b)$ .

Pro jaké vstupní hodnoty se algoritmus po nějakém čase zastaví?