

# Mnohoúhelníky

3. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. PROSINCE 2021

ÚLOHA 1. (3 BODY)  
Matěj má hromadu rovnostranných trojúhelníků o straně délky 1. Skládá je k sobě tak, že sousedící trojúhelníky se dotýkají vždy celou stranou. Mohl takhle sestavit nějaký 67-úhelník bez děr?

ÚLOHA 2. (3 BODY)  
Hedvika vzala svůj oblíbený pravidelný  $n$ -úhelník a nakreslila všechny pravoúhlé trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou vrcholy Hedvičina  $n$ -úhelníku. Celkem nakreslila 1200 trojúhelníků. Najděte všechna možná přirozená čísla  $n$ , pro která se toto mohlo stát.

ÚLOHA 3. (3 BODY)  
Ukažte a zdůvodněte, že existuje šestiúhelník, který má délky stran 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ne nutně v tomto pořadí) a všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké.

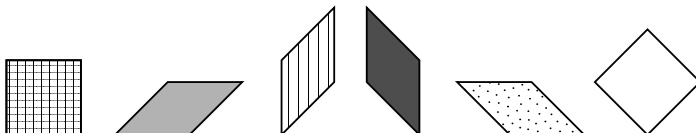
ÚLOHA 4. (5 BODŮ)  
Pětiúhelník  $PRASE$  má všechny strany stejně dlouhé a úhly u vrcholů  $P$  a  $E$  jsou pravé. Označme  $X$  průsečík úhlopříček  $PA$  a  $RE$ , dokažte  $|XA| = |XE|$ .

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)  
Na soustředění bylo  $n$  účastníků a  $n$  orgů, kde  $n \geq 2$ . Každý z nich se postavil do jednoho vrcholu pravidelného  $2n$ -úhelníku. V každém vrcholu stojí buď účastník, nebo org. Potom na zem nakreslili úsečky; mezi každou dvojicí účastníků nakreslili modrou úsečku a mezi každou dvojicí orgů červenou. Ukažte, že pro libovolné reálné  $d$  je na zemi stejně modrých úseček délky  $d$  jako červených úseček délky  $d$ .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)  
Mějme čtverec  $ABCD$  o délce strany 1. Na stranách  $BC$  a  $CD$  leží postupně body  $E$  a  $F$  splňující  $|\angle EAF| = 45^\circ$ . Dokažte, že obvod trojúhelníku  $ECF$  je 2.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)  
Mnohoúhelník nazveme *pěkným*, pokud jsou délky jeho stran po dvou různé, velikosti jeho vnitřních úhlů ve stupních jsou celá čísla a lze mu opsat kružnici. Rozhodněte, zda existuje pěkný 19-úhelník a zda existuje pěkný 20-úhelník.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)  
Majda a Pepa chtějí vydláždít podlahy svých koupelen, které mají stejný tvar. Podlaha má tvar osmiúhelníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou stejné. Pro vydláždění mají k dispozici těchto šest typů dlaždiček, které musí být orientované jako na obrázku (nesmí se otáčet):



Všechny dlaždičky mají délku stran 1 a jsou to buď čtverce, nebo kosočtverce s jedním úhlem o velikosti  $45^\circ$ .

Majda a Pepa každý vydláždili podlahu jiným vzorem. Ukažte, že oba museli použít stejné počty dlaždiček stejného typu. Vydláždění můžou vypadat například takto:

