Odmocniny

3. jarní série Termín odeslání: 4. dubna 2022

Úloha 1. (3 body)

Rozhodněte, zda lze zvolit po dvou různá přirozená čísla a, b, c taková, že $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ ani $\sqrt{abc}$ nejsou celá čísla, ale $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$ i $\sqrt{ca}$ jsou?

Úloha 2. (3 body)

Spočtěte hodnotu výrazu

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Úloha 3. (3 body)

Daník na pololetním vysvědčení dostal samé jedničky. Z dlouhé chvíle si všechny své jedničky zapsal za sebe a ze získaného čísla (v desítkové soustavě) spočetl druhou odmocninu. Shodou okolností mu vyšlo celé číslo. Kolik mohl mít Daník předmětů?

Úloha 4. (5 bodů)

Jsou dána kladná racionální čísla p a q, pro něž je $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ rovněž racionální číslo. Dokažte, že také $\sqrt[3]{p}$ je racionální.

Úloha 5. (5 bodů)

Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y splňující

$$\begin{aligned} x^2+y^2+xy &= 133,\\ x+y+\sqrt{xy} &= 19. \end{aligned}$$

Úloha 6. (5 bodů)

Na kružnici ω leží body A, B a P. Tečny k ω v bodech A, B pojmenujme po řadě t_A, t_B. Následně vzdálenosti bodu P od přímek t_A, t_B a AB označme po řadě a, b a c. Dokažte, že $c=\sqrt{ab}$.

Úloha 7. (5 bodů)

V PraSestánu se nachází n měst, z nichž některé dvojice jsou spojené obousměrnými leteckými linkami. Pepovi se povedlo nalézt leteckou trasu mezi městy, během níž poletí ℓ-krát a zároveň se v žádném městě neocitne více než jednou. Potom Pepa společně s Radečkem odhalil pozoruhodnou skutečnost: vždy když si nějaké město označí jako start a jiné jako cíl, dovede každý z nich procestovat nějakou leteckou trasu ze startu do cíle tak, že žádné město kromě startu a cíle nebude navštíveno oběma. Dokažte, že Pepa si dovede naplánovat okružní výlet, při kterém poletí alespoň $\sqrt{2\ell}$-krát, vrátí se do města, z něhož vyrazil, a žádné jiné město nenavštíví více než jednou.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Majda položila na stůl dvacet po sobě jdoucích přirozených čísel. Dokažte, že Naty si z nich dovede vybrat číslo d takové, že pro libovolné přirozené číslo n platí nerovnost

$$n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{5}{2},$$

kde $\{x\}$ značí *desetinnou část* reálného čísla x, tedy to číslo z intervalu $\langle 0, 1)$, pro něž je $x - \{x\}$ celé číslo.