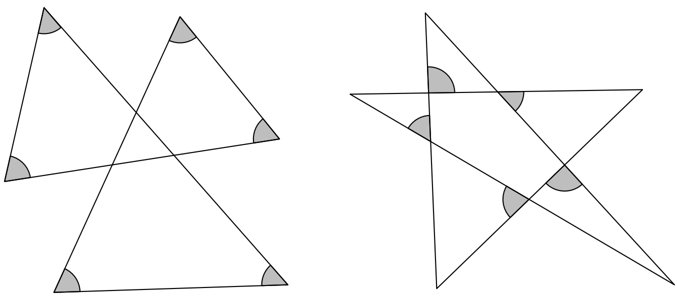
Porovnávání

2. podzimní série — Termín odeslání: 8. listopadu 2021

Úloha 1. (3 body)

Rozhodněte a zdůvodněte, zda je součet vyznačených úhlů větší v obrázku a), či v obrázku b).



a) b)

Úloha 2. (3 body)

Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Porovnejte $\sqrt{n}$ a

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Úloha 3. (3 body)

Pravoúhlý trojúhelník má přeponu délky c a poloměr kružnice vepsané r. Dokažte, že $c > 4r$.

Úloha 4. (5 bodů)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC je M střed přepony AB. Zvolíme bod P na úsečce AM a bod Q na úsečce MB tak, že $|PQ| = |CQ|$. Dokažte, že platí $|AP| \leq 2 \cdot |MQ|$.

Úloha 5. (5 bodů)

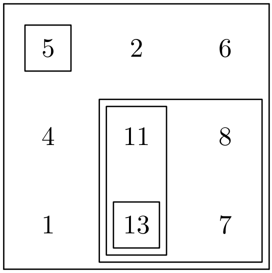
Je dáno přirozené číslo m a taková k-tice přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nepřevyšujících m, že každé z čísel $1, 2, \ldots, m$ je dělitelné nanejvýš jedním a_i pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \leq \frac{3}{2}.$$

Úloha 6. (5 bodů)

PraSestán je tvořen tabulkou s $m \times n$ políčky, na každém z nichž se pase nějaké množství prasat. *Pohraničím* obdélníkové oblasti O tvořené políčky tabulky rozumíme množinu těch políček, která neleží v O, ale která s některým políčkem v O sousedí stranou. Obdélníková oblast O je *bohatá*, pokud se na každém políčku v O pase více prasat než na každém políčku v pohraničí O, které s ním sdílí sloupec či řádek (nemusí však nutně sousedit). Kolik nejvíce bohatých obdélníkových oblastí se může v PraSestánu nacházet, pokud smíme libovolně upravit počty prasat na jednotlivých políčkách?

Například v následující tabulce s počty prasat jsou bohatými právě všechny zvýrazněné obdélníkové oblasti (včetně celého PraSestánu):



Úloha 7. (5 bodů)

Jsou dána kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a, c > 1$ a $b, d < 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

Úloha 8. (5 bodů)

U kulatého stolu je na židlích rozesazeno n reálných čísel. Židli $ž$ nazveme *dobrou*, pokud má nějaká skupinka[1] po sobě jdoucích židlí začínající od $ž$ a pokračující po směru hodinových ručiček nezáporný součet svých čísel. Dokažte, že součet čísel na dobrých židlích je nezáporný.

[1] Skupinkou po sobě jdoucích židlí může být i jedna židle sama o sobě.