

Násobky

2. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. BŘEZNA 2022

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Najděte sto (ne nutně různých) přirozených čísel, jejichž součet je roven jejich nejmenšímu společnému násobku.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Uvažujme dvojici přirozených čísel a, b takovou, že $a + 13b$ je násobkem 11 a zároveň $a + 11b$ je násobkem 13. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b$.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Najděte nejmenší přirozené číslo, jehož ciferný součet je 1000 a jehož dvojnásobek má ciferný součet 1010.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Mějme trojúhelník ABC , ve kterém platí $|AB| > |AC|$ a $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Označme H jeho ortocentrum a I střed jeho kružnice vepsané. Dokažte, že

$$2 \cdot |\sphericalangle AHI| = 3 \cdot |\sphericalangle ABC|.$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
V čtyřúhelníku $ABCD$ je součet $|BC|$ a $|AD|$ roven dvojnásobku délky úsečky spojující středy AB a CD . Dokažte, že přímky BC a AD jsou rovnoběžné.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Mějme posloupnost přirozených čísel definovanou pomocí $a_1 = 2021$ a vztahu

$$a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 1.$$

Dokažte, že a_n má ve svém rozkladu alespoň $2n$ prvočísel včetně násobnosti.¹

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Pro prvočíslo p označme množinu $M_p = \{1, \dots, p-1\}$. Nalezněte všechna prvočísla p , pro něž existuje funkce f z M_p do M_p taková, že pro každé $n \in M_p$ je $n \cdot f(n) \cdot f(f(n)) - 1$ násobkem p .

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Nalezněte všechny dvojice prvočísel p, q , pro něž je $2^p + 2^q$ násobkem čísla pq .

¹Například $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ má v rozkladu 3 prvočísla včetně násobnosti.