

Matematická indukce 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. PROSINCE 2021

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Nechť S je množina s 2021 prvky. Ukažte, že pro každé nezáporné celé číslo $N \in \{0, 1, \dots, 2^{2021}\}$ lze obarvit všechny podmnožiny S buď červenou, nebo zelenou barvou tak, aby právě N podmnožin bylo červených a aby sjednocení dvou množin stejné barvy mělo tu danou barvu.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Nechť n je přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě a $S(n)$ je jeho ciferný součet. Přirozené číslo nazveme *odřezkem* čísla n , pokud vzniklo odebráním několika cifer (nejméně jedné) z pravého konce zápisu čísla n v desítkové soustavě. Nechť $T(n)$ je součet všech odřezků čísla n . Ukažte, že $n = S(n) + 9T(n)$.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Ittihad připravil n palačinek, ale povedlo se mu je všechny z právě jedné strany připálit. Když už nejsou k jídlu, zahraje si s nimi následující hru. Palačinky rozestaví do řady tak, že některé jsou obrácené bílou a jiné spálenou stranou nahoru. Tah sestává z odebrání palačinky spálené shora a obrácením jejích přímých sousedů, pokud nějakí jsou, na opačnou stranu.¹ Ittihad vyhraje, pokud se mu podaří odebrat všechny palačinky. Pro která uspořádání palačinek lze hru vyhrát?

¹Přitom dvě palačinky nejsou považovány za přímo sousedící, pokud mezi nimi předtím ležela již odebraná palačinka (tedy po odebrání palačinek vznikají mezery).