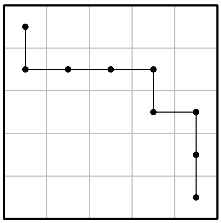
Umění

1. PODZIMNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. ŘÍJNA 2021

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Pavel chce namalovat obraz do tabulky $n \times n$. Každý tah štětcem začíná v levém horním rohovém políčku a následně může pokračovat do dalších políček, štětec se přitom vždy musí posouvat z jednoho políčka do sousedního směrem doprava nebo dolů. Štětec zabarví každé políčko, přes které přejede. Kolik nejméně tahů štětcem musí Pavel provést, aby zabarvil celou tabulku?



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Verča si črtá do skicáře. Nejprve načrtla čtverec $ABCD$ s bodem E ležícím na jeho úhlopříčce AC tak, že $|AE| > |EC|$. Na jeho straně AB potom nakreslila bod F různý od B tak, aby platilo $|EF| = |DE|$. Dokažte, že $\sphericalangle DEF$ je pravý úhel.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Terka zakopla s plechovkou barvy, čímž do 2021 různých bodů na dosud čistém plátně dopadla kapka barvy. Mohlo se stát, že těžištěm každých 41 kapek je opět nějaká kapka? Uvažujme, že kapky jsou body a mají všechny stejnou hmotnost.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Dominik rád kreslí kuželosečky. Zvolí reálná čísla a, b, pro něž parabola $y = x^2 + ax + b$ protíná osy x a y dohromady ve třech různých bodech. Poté nakreslí kružnici, na níž tyto tři body leží. Dokažte, že tato kružnice prochází pevným bodem nezávislým na a, b.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Martin vyplňuje nekonečný čtverečkovaný papír kladnými celými čísly. Chtěl by to provést tak, aby každý čtvereček s číslem k měl mezi svými osmi sousedy přesně k čtverečků, které jsou taktéž vyplněny číslem k. Kolik nejvýše různých čísel může Martin použít?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Danil chce nakoupit n plechovek barvy o celkové hmotnosti $2^n - 1$ kilogramů. Pokud budou jednotlivé plechovky mít kladné reálné hmotnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kilogramů, zaplatí za ně v rámci slevové akce jen

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + a_1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}$$

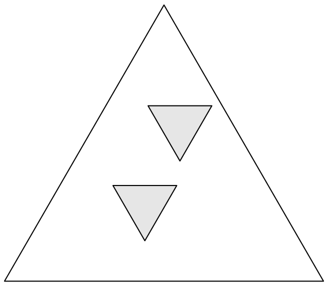
korun. Kolik nejméně může zaplatit, pokud si rozdělení barvy mezi jednotlivé plechovky může zvolit libovolně?

Úloha 7. (5 bodů)

Archeolog Michal objevil jeskynní malbu pravěkých neandrtálců. Zobrazuje trojúhelník ABC, v němž je M střed strany AC a platí $|\sphericalangle CBM| = 2|\sphericalangle ABM|$. Dále je zobrazen vnitřní bod K úsečky BM splňující $|CM| = |CK|$. Dokažte, že $|MK| = |BC|$.

Úloha 8. (5 bodů)

Lenka tvoří moderní umění. Nejprve si načrtne rovnostranný trojúhelník Δ o straně délky $L > 0$ orientovaný špičkou nahoru. Dovnitř trojúhelníku Δ potom nakreslí n rovnostranných trojúhelníčků se stranami délky 1 orientovaných špičkou dolů, z nichž žádné dva se nepřekrývají[1]. Obrázek ukazuje příklad Lenčina výtvoru s $n = 2$.



Dokažte, že ať už bude Lenka kreslit jakkoliv, bude platit $n \leq \frac{2}{3}L^2$.

[1] Můžou se však dotýkat stranami.