Matematická indukce I – Padající domina

Milý příteli,
v rukou držíš zbrusu nový PraSečí seriál, ve kterém se dozvíš něco o matematické indukci. Jedná se o jednu ze základních důkazových technik, hned vedle přímého důkazu nebo důkazu sporem. Důkaz, to je gró matematiky. A proto je to samozřejmě i základ úloh matematického semináře. Bez správného dokazování matematických tvrzení by se nám celá teorie rozpadla – jak bychom jinak zajistili, aby bylo dané tvrzení pravdivé? Možnost dokazování je zároveň i krásná vlastnost matematiky, protože co jednou dokážeme, to je pak pravdivé a jasné a experimentem to nevyvrátíme, jako je tomu u méně exaktních věd.

Seriál pro Tebe letos píší Káťa Panešová a Ittihad. V případě zvídavých dotazů či jakýchkoli nejasností se na nás neváhej obrátit na *kacka.panesova@gmail.com* a *ahmedittihad@hotmail.com*.

Jak číst seriál

Jednotlivá témata jsme se snažili seřadit podle obtížnosti. Nicméně pokud se místy budeš ztrácet, klidně nějakou tu část přeskoč a vrať se k ní později – části na sobě nejsou nijak výrazně závislé.

V rámci tohoto textu najdeš i příklady k procvičení. Ty jsou nadepsané jako **Cvičení** nebo **Úloha**. Cvičení jsou jednodušší, jejich řešení Ti zabere pár minut a slouží k osvěžení právě zažité teorie. Naproti tomu úlohy mohou být složitější, jsou podobné soutěžním úlohám v semináři a jejich řešení může trvat déle. Na cvičeních ani úlohách další obsah seriálu nijak nestaví, a proto můžeš číst dál, i když je nevyřešíš všechny. Cvičení i úlohy mají na konci dílu nápovědy a řešení.

Na závěr jsme připojili dvě trochu náročnější kapitoly. První je ukázka řešení úlohy Mezinárodní matematické olympiády (fajnšmekři ji můžou zkusit vyřešit sami – napovíme: zapotřebí je indukce). Ta úloha není jednoduchá a uvádíme ji proto, abychom ukázali, že i velmi složitá úloha může vyžadovat překvapivě málo složité teorie, ovšem hodně důvtipu! Pokud řešení úplně neporozumíš, nevěš hlavu, tato část není zásadní – je to spíše takový bonus. Druhým bonusovým pokročilým tématem je pak Cauchyho funkcionální rovnice.

Ke každé sérii přísluší tři soutěžní úlohy, na základě tohoto dílu se tedy můžeš pustit do úloh 1. seriálové série. Těšíme se na Tvoje řešení!

Úvod

Jednoho obzvlášť nezáživného odpoledne sedíš ve svém pokoji a snažíš se nějak zabít čas. Všimneš si krabice s dominovými kostkami, o kterou jsi léta nezavadil(a). A začneš je stavět do řady. Se zvláštní pečlivostí dbáš na to, aby rozestupy mezi domino nebyly příliš široké. A po chvíli jsou všechna domina dokonale seřazená a tvoří dlouhého hada. Pohlédneš na svůj výtvor a jemně cvrnkneš do prvního domina. A další následují ...

Jak tento dominový princip souvisí s naším seriálem? Nejlépe si to ukážeme na motivační úloze.

Příklad. Ukaž, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vyzkoušejme nejprve, zda to vůbec platí pro několik nízkých čísel. Snadno vypočteme, že pro 1, 2 i 3 rovnost platí. Navíc nemusíme pokaždé sčítat znovu od 1 do n na levé straně – například pro $n = 4$ využijeme znalosti součtu pro $n = 3$, tedy pouze sečteme 6 a 4. Obdobně pokračujeme pro 5, pak 6 atd. Takto bychom mohli postupně ověřit hypotézu pro všechna čísla až do 100, do 1000, ..., nikdy ovšem nevyjmenujeme všechna přirozená čísla!

Klíčem je provést krok, ve kterém ověříme, že hypotéza platí i pro číslo o 1 vyšší (jako jsme to udělali pro 4, 5 a 6), jen jednou pro obecné přirozené číslo.

Řešení. Předpokládejme, že rovnost platí pro nějaké přirozené číslo k. Tedy

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Potom pro $k + 1$ máme

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Což je přesně daná rovnost pro $k + 1$. Ukázali jsme, že pokud rovnost platí pro k, platí i pro $k + 1$. Dohromady s ověřením, že vztah platí pro 1, dostáváme, že je platný i pro každé následující číslo, a tedy postupně pro všechna přirozená čísla.

To, co jsme právě předvedli, se nazývá vznešeně *důkaz matematickou indukcí*. Proč přesně to funguje? Teď přichází do hry náš příměr s dominem. *Indukční krok* aneb to, jak jsme ukázali, že pokud rovnost platí pro k, platí i pro $k + 1$, vlastně odpovídá pečlivému rozestavění domin, aby nebyla moc daleko od sebe. Potom stačí jedno cvrnknutí do počátečního domina neboli *základní krok*, ve kterém jsme ověřili rovnost pro $n = 1$, a každé další domino už zcela jistě spadne. A naše tvrzení tak platí pro každé přirozené číslo.

Shrňme si postup důkazu: Chceme ukázat, že tvrzení $T(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n. Důkaz matematickou indukcí probíhá ve třech krocích.

(1) Ukážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$.
(2) Předpokládáme, že $T(k)$ je pravdivé. S tímto *indukčním předpokladem* ukážeme, že potom je i $T(k + 1)$ pravdivé.
(3) Potom tvrzení induktivně platí pro všechna přirozená čísla.

Počítáme aneb co všechno lze vyřešit indukcí

Mathematics presented with rigor is a systematic deductive science but mathematics in the making is an experimental inductive science.

– *G. Pólya*

Když z pozorovaného konkrétního jevu vyvodíme obecný závěr, říkáme tomu induktivní myšlení. Naproti tomu pomocí deduktivního myšlení jsme schopni dát dohromady obecné předpoklady a z nich usoudit na konkrétní logický důsledek. Ačkoli v matematických důkazech nejčastěji narazíte právě na dedukci, pravděpodobně jí předcházely hodiny zkoušení, pozorování a pokusů zobecnit pozorovanou skutečnost. Podobného procesu si všimni i u následujících problémů. K odhalení vztahu bylo zapotřebí induktivního myšlení a posléze k důkazu hypotézy použijeme dedukci ve formě důkazu matematickou indukcí. Zde je nutné poznamenat, že i přes poněkud nešťastný název matematické indukce se jedná o důkazovou techniku, a tedy přesný opak induktivního myšlení.

Součty

Už jsme si ukázali, že součet prvních n přirozených čísel lze vyjádřit jako $\frac{n(n+1)}{2}$. Podívejme se na další zajímavé součty.

Příklad. Ukaž, že

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Řešení. Nejprve ověříme hypotézu pro $n = 1$. Levá strana je prostě 1, pravá strana je rovna $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$. Rovnost tedy platí.

Nyní předpokládejme, že rovnost platí pro přirozené číslo k. Potom

$$\begin{aligned}
1 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1) \cdot \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \\
&= (k+1) \cdot \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},
\end{aligned}$$

což je přesně výraz na pravé straně pro $n = k + 1$. Z matematické indukce pak plyne, že rovnost platí pro všechna přirozená čísla.

Cvičení 1. Dokaž, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Cvičení 2. Zjednoduš výraz

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ukaž, že nalezená rovnost platí pro všechna přirozená čísla.

Cvičení 3. Zjednoduš součet

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n(n+1).$$

Matematickou indukcí nebo jiným způsobem ověř pravdivost svého řešení.

Cvičení 4. Zjednoduš výraz

$$1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \cdots + n\cdot 2^{n-1}$$

a ověř jeho platnost pomocí indukce nebo jinak.

Dělitelnost

Definice. Mějme celá čísla m a n. Potom říkáme, že m *dělí* n, pokud existuje celé číslo k takové, že $n = mk$. Tuto skutečnost zapisujeme $m \mid n$.

Příklad. Ukaž, že pro každé přirozené číslo n platí $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + n$.

Důkaz. Pro $n = 1$ dostáváme $2n^3 + 3n^2 + n = 2 + 3 + 1 = 6$, což je dělitelné šesti.

Předpokládejme nyní, že hypotéza platí pro $n = k$. Potom

$$\begin{aligned} 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1) &= 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3(k^2 + 2k + 1) + (k+1) \\ &= (2k^3 + 3k^2 + k) + 6(k^2 + 2k + 1), \end{aligned}$$

což je dle indukčního předpokladu dělitelné šesti.

Podle matematické indukce pak tvrzení platí pro všechna přirozená čísla. □

Poznámka. Alternativně bychom mohli příklad řešit rozkladem na součin $n(n+1)(2n+1)$ a pozorováním, že právě jedno z těchto čísel je sudé a právě jedno je dělitelné třemi, jelikož pokud ani jedno z n, $n+1$ není dělitelné třemi, pak jejich součet jistě je.

Úloha 1. Ukaž, že mezi libovolnými 3^{k+1} čísly lze najít 3^k čísel, jejichž součet je dělitelný 3^k.

Úloha 2. Ukaž, že pro každé přirozené číslo n existuje číslo, jehož dekadický zápis obsahuje pouze cifry 1 a 2 a které je dělitelné 2^n.

Úloha 3. Nechť x je nenulové reálné číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Ukažte, že potom $x^n + x^{-n}$ je celé číslo.

Nerovnosti

Pomocí matematické indukce umíme dokázat celou řadu zajímavých nerovností. Na jednu z nejznámějších nerovností si však počkáme až do kapitoly o Cauchyho indukci.

Příklad. Ukaž, že pro všechna přirozená čísla n platí nerovnost

$$V(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Důkaz. Pro $n = 1$ nerovnost zřejmě platí, resp. nastane rovnost.

V rámci indukčního kroku ukážeme, že součet na levé straně roste s rostoucím n, a tedy je stále větší než $\frac{1}{2}$. Rozdíl

$$\begin{aligned} V(n+1) - V(n) &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

je kladný, což znamená, že každý další člen je o trochu větší.

Proto je-li $V(n)$ větší nebo roven $\frac{1}{2}$, tak i $V(n+1)$ je větší nebo roven $\frac{1}{2}$. Dle matematické indukce tvrzení platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Příklad. Ukaž, že[1]

$$n! \geq 2^n$$

pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovná 4.

Řešení. V tomto případě potřebujeme základní krok provést až pro $n = 4$. To jest $4! = 24 \geq 16 = 2^4$. Dalším krokem je předpokládat, že nerovnost platí pro $n = k$. Potom však

$$(k+1)! = (k+1)(k!) \geq (k+1) \cdot 2^k \geq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Důkaz pak vyplývá z matematické indukce.

---

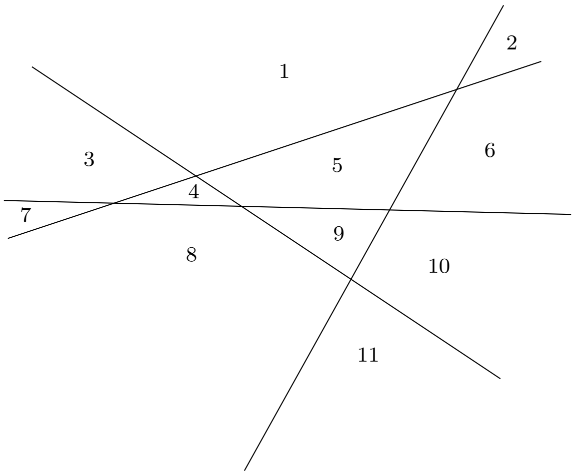
[1] Faktoriál přirozeného čísla n je součin přirozených čísel menších nebo rovných n, tedy $n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Úloha 4. Ukaž, že pro každé přirozené n větší nebo rovno 3 platí nerovnost

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{n^2}{4}.$$

Geometrie

Příklad. Mějme v rovině n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Na kolik oblastí přímky dělí rovinu?



Řešení. Tvrdíme, že odpověď je $1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Pro nula přímek tvrzení zřejmě platí.

Předpokládejme, že n přímek rozdělí rovinu na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ částí. Zjistíme, kolik oblastí přibyde nakreslením další přímky. Protože nová přímka nesmí být rovnoběžná s žádnou z předchozích přímek a nesmí procházet žádným již nakresleným průsečíkem, jistě protne každou stávající přímku v právě jednom bodě a celkem přibyde n průsečíků. To znamená, že přibylo $n + 1$ úseků mezi průsečíky, které rozdělily $n + 1$ oblastí na dvě, celkem tedy přibylo $n + 1$ oblastí. S použitím indukčního předpokladu je nyní oblastí celkem

$$1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

a důkaz poté platí podle matematické indukce.

Cvičení 5. Mějme v rovině n kružnic, které ji dělí na několik oblastí. Ukaž, že lze jednotlivé oblasti obarvit dvěma barvami tak, aby spolu nesousedily žádné dvě oblasti stejné barvy.

Úloha 5. Mějme $2n$ bodů v rovině, kde n je větší než 1. Některé body spojíme úsečkami, nakreslíme celkem $n^2 + 1$ úseček. Ukaž, že jsme nakreslili alespoň jeden trojúhelník.

Úloha 6. Ukaž, že každý mnohoúhelník (ne nutně konvexní) lze rozdělit na trojúhelníky pomocí úhlopříček, které leží uvnitř mnohoúhelníku.

Tradiční úlohy

Příklad. Mějme n kanystrů s benzinem, rozmístěných po kruhové dráze. Rádi bychom si jeden okruh objeli, bohužel však máme prázdnou nádrž. Naštěstí víme, že v kanystrech je dohromady právě takové množství pohonné hmoty, kolik potřebujeme na jedno kolo a kolik se vejde do nádrže. Auto můžeme umístit kamkoli na okruhu a doufat, že nám benzin z jednoho kanystru vydrží, než doplníme benzin z kanystru následujícího. Nebo doufat nemusíme? Ukaž, že lze pokaždé, ať je rozmístění kanystrů po dráze jakékoli a ať jsou jakákoli i množství benzinu v jednotlivých kanystrech (v součtu dávající plnou nádrž), vybrat startovací místo tak, abychom objeli celý okruh.

Řešení. Nejprve poznamenejme, že startovací místo musí být vždy u nějakého z kanystrů, protože na začátku je naše nádrž prázdná a potřebujeme doplnit benzin.

Pro $n = 1$ máme na dráze pouze jeden kanystr, a ten tedy musí obsahovat benzin na celé jedno kolo. Proto stačí umístit auto k tomuto kanystru a okruh pak hravě objedeme. Našli jsme tedy startovací místo pro $n = 1$.

Nyní předpokládejme, že pro $n = k$ jsme pokaždé schopni najít vhodné startovací místo. Je-li na dráze $k + 1$ kanystrů, ukážeme sporem, že vždy se najde takový, že benzin z něj vystačí na dojezd k dalšímu kanystru. Kdyby to totiž nešlo, pak by zcela jistě nevystačil benzin ze všech kanystrů dohromady na objetí celého okruhu, což je požadovaný spor.

Pojmenujme tento kanystr K_1 a kanystr po něm následující K_2. Představme si, že bychom odebrali kanystr K_2 a benzin z něj bychom přelili do kanystru K_1. Potom by na trati bylo k kanystrů a dle indukčního předpokladu bychom našli vhodné startovací místo.

Rozmysli si, že toto startovací místo funguje i pro předchozí uspořádání s $k+1$ kanystry. A jsme hotovi.

Cvičení 6. Adam a Berta hrají hru podle následujících pravidel. Mají n sirek a v každém tahu lze ubrat 1 až 4 sirky. Prohrává ten hráč, který už nemůže táhnout. Začíná Adam. Pro která n má Berta vyhrávací strategii?[2] Dokaž.

Úloha 7. V jisté zemi je každá cesta jednosměrná. Každá dvě města jsou propojena právě jednou přímou cestou. Ukaž, že můžeme nalézt město, do kterého se lze dostat z každého města buď přímo, nebo přes jedno jiné město.

Selhání indukce?

> *If we have no idea why a statement is true, we can still prove it by induction.*
> – *Gian-Carlo Rota*

Uvažme toto nepravdivé tvrzení a jeho falešný důkaz.

Příklad. Všichni koně na světě mají stejnou barvu.

Řešení. Indukcí podle n dokážeme tvrzení „Ve skupině n koní jsou všichni stejné barvy.“

Základní krok je triviální – ve skupině o jednom koni mají nutně všichni koně stejnou barvu. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$, a uvažme skupinu $k+1$ koní $\{H_1, H_2, \ldots, H_{k+1}\}$. Podskupina $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ čítá k koní, a proto podle indukčního předpokladu mají všichni stejnou barvu. Stejně tak podskupina $\{H_2, H_3, \ldots, H_{k+1}\}$ obsahuje právě k koní, a tedy jsou všichni téže barvy. Obě podskupiny přitom mají společný průnik, proto jsou nutně obě podskupiny stejné barvy. A tedy i výsledná skupina je jednobarevná! Tím jsme dokázali indukční krok a z matematické indukce vyplývá dokazované tvrzení.

Toto je zcela jistě chybný závěr. Takže s důkazem musí být něco špatně. Najdeš co? Podívejme se na jiný problém.

[2] Vyhrávací strategie znamená, že hráč je schopen vyhrát, ať jeho protihráč táhne jakkoli.

Příklad. Účastníš se intenzivní letní školy, která se koná celý červenec. Těsně před začátkem školy vám profesor oznámí, že někdy během pobytu vás čeká zvláštní přepadový kvíz. Den kvízu bude vybrán tak, že až přijde, nebudete to čekat. Dokážeš přijít na to, kdy se test uskuteční?

Chvíli o tom přemýšlíš a dojde Ti, že kvíz nemůže být 31. července, protože je to poslední den pobytu. Kdyby do té doby nepřišel, všichni by čekali, že to musí přijít právě poslední den. Ale to znamená, že test nemůže být ani 30. července, protože jsme se již dopátrali toho, že 31. nebude, a tedy 30. je nyní poslední možný den. Obecně pokud se nemůže konat od n-tého dne dál, můžeš $(n-1)$-ního dne očekávat, že test přijde, a tedy test přijít nemůže. Induktivně dojdeme k závěru, že test se nemůže konat žádný den.

A přece, něco na tomto argumentu nehraje. Například předpokládejme, že kvíz dostanete 13. července. Tento výběr by Tě dozajista překvapil, neboť jsi právě usoudil(a), že žádný kvíz nebude. Tedy to nakonec přece jen byl přepadový test!

Tomuto paradoxu se též říká „paradox nečekané popravy“, kdy je příběh vyprávěn z pohledu vězně, který se dozví o „nečekané“ popravě. Je to vskutku zneklidňující paradox! Tady se ovšem do jeho rozboru nebudeme nořit příliš hluboko. Jen poznamenáme, že profesorův výrok je velmi vágní – abychom o problému mohli logicky uvažovat, potřebovali bychom přesně stanovit, co znamená být „překvapený“ a „vědět“, že se test musí daný den uskutečnit. Dostali bychom se do oblasti filosofie, které se říká epistemologie.

Naštěstí pro nás, úlohy, kterými se zde budeme zabývat, spadají čistě do matematiky a její přesnost zabraňuje vzniku induktivních paradoxů.

Výstražný případ

Zatím se mohlo zdát, že ta skutečná práce při důkazu indukcí spočívá v dokázání indukčního kroku. Až by se jeden mohl troufale domnívat, že stačí dokázat indukční krok, protože první krok je přece jasný. Ukážeme si, že bez základního kroku to nejde.

Tvrzení. *Všechna kladná lichá čísla jsou dělitelná dvěma.*

Důkaz. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna lichá čísla až do $n = k$. Následující liché číslo je $k + 2$. Dle indukčního předpokladu je k dělitelné dvěma, a proto i $k + 2$ musí být násobek dvou. Dle matematické indukce tvrzení platí pro všechna kladná lichá čísla. □

Tvrzení. *Pro všechna přirozená čísla n platí, že $23 \mid 7^{2n+1} + 3^{n+2}$.*

Důkaz. Základní krok je jasný, takže jej přeskočíme. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$. Potom

$$7^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} = 49 \cdot 7^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2} = 3 \cdot \left(7^{2k+1} + 3^{k+2}\right) + 46 \cdot 7^{2k+1}.$$

Oba sčítance jsou dle indukčního předpokladu dělitelné 23, a proto je i konečný součet násobkem 23. Dle matematické indukce tvrzení tedy platí pro všechna přirozená čísla. □

Snadno ověříme, že ani jedno z předchozích tvrzení není pravdivé. Proto nepodceňujme základní krok.

Indukce a její aplikace

Bernoulliho nerovnost

Věta. *Mějme reálné číslo x větší než -1 a přirozené číslo n. Potom*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Důkaz. Zvolme pevně reálné číslo $x > -1$. Použijeme indukci podle n. Nejprve ověříme nerovnost pro $n = 1$. Zjevně $1 + x \geq 1 + x$.

Nyní předpokládejme, že nerovnost platí pro $n \geq 1$. Potom

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x).$$

Použili jsme indukční předpoklad a také fakt, že $1 + x > 0$. Po roznásobení dostaneme

$$1 + (n+1)x + nx^2,$$

což je větší než $1 + (n + 1)x$.

Matematickou indukcí dostáváme Bernoulliho nerovnost pro všechna přirozená čísla. $\square$

Cvičení 7. Ukaž, že pro přirozené číslo n platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Úloha 8. Ukaž, že posloupnost $\{a_n\}_{n\geq 1}$, kde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, je rostoucí.

Binomický rozvoj

Věta. *Pro reálné číslo x a přirozené číslo n platí*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Nejprve si rozmysleme, co tato věta vlastně říká. Levá strana je prostě $(1 + x)$ umocněno na n-tou. Řecké písmeno *sigma* Σ na pravé straně je jen otázkou notace. Sumu můžeme rozepsat:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.$$

$$\begin{array}{r} \text{\dots až do } n\ \{ \\[3ex] k \text{ jde od } 0 \dots\ \{ \end{array}\quad \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} x^k}_{\text{tyto členy sčítáme}}$$

Dále je třeba objasnit, co znamená to záhadné $\binom{n}{k}$. Jedná se *kombinační číslo*, které vyjadřuje, kolika způsoby můžeme vybrat k objektů z množiny n objektů. Například $\binom{5}{2}$ je počet způsobů, jak z pěti objektů vybrat neuspořádanou dvojici. Těch je (jak ukazuje obrázek níže) deset, tedy $\binom{5}{2} = 10$.

$\boxed{1}\,\boxed{2}$	$\boxed{2}\,\boxed{3}$	$\boxed{3}\,\boxed{4}$	$\boxed{4}\,\boxed{5}$
$\boxed{1}\,\boxed{3}$	$\boxed{2}\,\boxed{4}$	$\boxed{3}\,\boxed{5}$	
$\boxed{1}\,\boxed{4}$	$\boxed{2}\,\boxed{5}$		
$\boxed{1}\,\boxed{5}$			

Představme si, že vybíráme k karet z balíčku s n kartami a taháme je po jedné. Pro první kartu máme n možností, potom pro druhou zbývá už jen $n-1$ možností výběru a tak dále, až vybereme k-tou kartu ze zbývajících $n+1-k$ karet. To dává

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)$$

možností. Musíme si ovšem uvědomit, že některé skupinky po k kartách se opakují – stejnou skupinu určitých k karet lze totiž vybrat v několika různých pořadích. Kolik je těchto pořadí neboli kolika způsoby umíme seřadit k různých karet? Na první místo můžeme vybírat ze všech k karet, na druhé místo v pořadí nám jich zbývá jen $k-1$ a tak dále, až se dostaneme na poslední místo, na které už vyzbyla jediná karta. Máme tedy

$$k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

seřazení k karet. Každou skupinku k karet z pytlíku jsme tedy vybrali přesně tolikanásobně! Proto je počet různých k-skupinek z n karet právě

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}.$$

Pro ulehčení používáme zkrácený zápis pomocí *faktoriálu*[3], kdy

$$k! = k(k-1)\cdots 2\cdot 1.$$

Konečně tedy můžeme psát

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Nyní už chápeme, co binomická věta říká, pojďme se tedy podívat na pár příkladů.

Pro $n=2$ dostáváme známý vzorec

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Někteří možná ze školy znáte vzorec pro třetí mocninu

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Koeficientům jednotlivých mocnin x se říká *binomické koeficienty*. Binomické koeficienty tvoří řádky *Pascalova trojúhelníku*. Ten vzniká tak, že do horního vrcholu napíšeme 1 a potom každé další číslo je součtem dvou čísel nad sebou, jak ukazuje obrázek.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & k=4 & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
n=6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & &
\end{array}$$

[3] Z kombinatorických důvodů máme $0! = 1$.

Pojďme si nyní binomickou větu dokázat jak jinak než pomocí matematické indukce!

Důkaz. Postupujme indukcí podle n. Ověříme hypotézu pro $n = 1$, máme

$$(1+x)^1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} x.$$

Nyní předpokládejme, že rovnost platí pro nějaké n. Potom

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\
&= (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}x^k + \binom{n}{k}x^{k+1}\right) \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right)x^{k+1} + \binom{n}{n}x^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+1}x^{k+1} + \binom{n}{n}x^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k,
\end{aligned}$$

takže rovnost platí i pro $n+1$. V pátém řádku jsme použili rovnost $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, která je znázorněna i v Pascalově trojúhelníku.

Důkaz poté vyplývá z matematické indukce. □

Cvičení 8. Ukaž, že platí

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Trigonometrie

Trigonometrické funkce *sinus* a *cosinus* znáš ze školy. Tyto funkce jsou neskutečně zajímavé a byla by škoda, kdybychom se aspoň lehce nepodívali na některé z jejich vlastností, které lze dokázat indukcí.

Příklad. Dokaž rovnost

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

kde $x \neq 2k\pi$ pro žádné $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Pro $n = 1$ máme platnou rovnost

$$\sin x = \frac{\sin x \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

V průběhu indukčního kroku budeme používat známé vztahy

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin A \cos B + \sin B \cos A,\\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B.\end{aligned}$$

Zvláště pak platí

$$\begin{aligned}\sin 2A &= 2\sin A \cos A,\\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A.\end{aligned}$$

V indukčním kroku předpokládejme, že rovnost platí pro $n = k$. Potom

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx + \sin(k+1)x &= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(k+1)x\\ &= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} + 2\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{\left(\sin\left(\frac{k}{2}x\right) + 2\cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{=V}.\end{aligned}$$

Nyní se zblízka podívejme na výraz V v závorkách. Dostaneme

$$\begin{aligned}V &= \sin\left(\frac{k}{2}x\right) + 2\cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{k}{2}x\right) + 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\left(\frac{k}{2}x\right)\cos\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{k}{2}x\right)\sin\frac{x}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{k}{2}x\right)\cdot\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{k}{2}x\right)\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos\left(\frac{k}{2}x\right)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= \sin\left(\frac{k}{2}x\right)\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{k}{2}x\right)\\ &= \sin\left(\frac{k}{2}x\right)\cos x + \sin x \cos\left(\frac{k}{2}x\right)\\ &= \sin\left(\frac{k}{2}x + x\right).\end{aligned}$$

Konečně tedy můžeme dát dohromady rovnost

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx + \sin(k+1)x = \frac{\sin\left(\frac{k+2}{2}x\right)\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

jak jsme chtěli ukázat.

Podle matematické indukce pak rovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Příklad. Pro všechna reálná čísla x a přirozená čísla n platí nerovnost

$$|\sin nx| \le n\,|\sin x|.$$

Důkaz. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Podrobnosti následujícího postupu si rozmysli v rámci cvičení níže. Předpokládejme, že hypotéza platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n = k$. Potom

$$\begin{aligned} |\sin(k+1)x| &= |\sin kx \cos x + \sin x \cos kx| \\ &\leq |\sin kx| \cdot |\cos x| + |\sin x| \cdot |\cos kx| \\ &\leq |\sin kx| + |\sin x| \\ &\leq k\,|\sin x| + |\sin x| \\ &= (k+1)\,|\sin x| \end{aligned}$$

a dle principu matematické indukce nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Cvičení 9. Tato nerovnost neplatí obecně pro jakékoli n. Je důležité, že n je přirozené číslo. Najdi protipříklad, kdy nerovnost pro nějaké $n \in \mathbb{R}$ neplatí. Kde v důkazu využíváme fakt, že n je přirozené číslo?

Cvičení 10. Rozmysli si, z čeho vyplývají jednotlivé nerovnosti v důkazu předchozího tvrzení.

Cvičení 11. Ukaž, že pro všechna reálná čísla x různá od $2k\pi$ a všechna přirozená čísla n platí identita

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

V hlavní roli silná indukce

Doteď jsme se zabývali pouze relativně přímočarou indukcí. Avšak některé problémy nelze rozlousknout tak jednoduše! Potřebujeme na ně o trochu *silnější* louskáček. Proto v této sekci objevíme „tu pravou sílu" matematické indukce s přiléhavým názvem *silná indukce*. V čem spočívá její síla? Odpověď zní: v indukčním kroku. Pojďme se na to podívat podrobněji.

Chceme dokázat, že tvrzení $S(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

(1) Ukážeme, že $S(0)$ je pravdivé.
(2) Zde přijde obměna! Předpokládáme totiž nejen to, že $S(k)$ platí, nýbrž že platí všechna tvrzení $S(0)$, $S(1)$, …, $S(k)$. S tímto silnějším předpokladem prokážeme pravdivost $S(k+1)$.
(3) A odměnou nám je, že dle principu silné matematické indukce platí tvrzení pro všechna přirozená čísla.

Rozmysleme si nyní, proč to funguje. Můžeme vůbec něco takového předpokládat? Jistěže ano – vrátíme-li se k analogii s dominem, tak využijeme faktu, že prvních n domin spadlo, abychom dokázali, že spadne i $(n+1)$-ní. Důkaz silnou indukcí je dokonce ekvivalentní důkazu běžnou indukcí!

Cvičení 12. Rozmysli si to jako cvičení.

Pro následující část se nám budou hodit Fibonacciho čísla.

Definice. Fibonacciho posloupnost $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, … je definovaná následujícím způsobem:

(1) $F(0) = 0$ a $F(1) = 1$.
(2) Pro přirozené číslo n platí $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$.

Prvních několik členů Fibonacciho posloupnosti je tedy 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

Pojďme se nyní na silnou indukci podívat v akci.

Věta. (Zeckendorfova) *Každé přirozené číslo lze zapsat jako součet různých Fibonacciho čísel, z nichž žádná dvě nejsou ve Fibonacciho posloupnosti po sobě jdoucí.*

Podívejme se na několik zajímavých[4] čísel a zkusme je vyjádřit jako součet Fibonacciho čísel, která po sobě nenásledují:

$$\begin{aligned}
6 &= 5 + 1 \\
&= F(5) + F(2), \\
28 &= 21 + 5 + 2 \\
&= F(8) + F(5) + F(3), \\
496 &= 377 + 89 + 21 + 8 + 1 \\
&= F(14) + F(11) + F(8) + F(6) + F(2), \\
8128 &= 6765 + 987 + 233 + 89 + 34 + 13 + 5 + 2 \\
&= F(20) + F(16) + F(13) + F(11) + F(9) + F(7) + F(5) + F(3).
\end{aligned}$$

Všimni si, že žádná dvě čísla v součtu po sobě v posloupnosti nenásledují.

Důkaz. Důkaz povedeme silnou indukcí. Nechť $S(n)$ je tvrzení, že přirozené číslo n lze zapsat jako součet Fibonacciho čísel, která nejsou po sobě jdoucí:

První krok je snadný, číslo 1 je samo o sobě Fibonacciho číslo. Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro $1, \ldots, k$ neboli že každé přirozené číslo až do k lze zapsat jako součet Fibonacciho čísel, z nichž žádná dvě nejdou po sobě. Uvažme číslo $k+1$. Pak existuje Fibonacciho číslo $F(x)$ pro nějaké $x \in \mathbb{N}$ takové, že

$$0 < F(x) \leq k + 1 < F(x + 1),$$

tedy že číslo $k + 1$ leží mezi dvěma Fibonacciho čísly nebo je rovno nižšímu z nich. Pokud nastane rovnost, jsme hotovi, jelikož $k+1$ lze zapsat jako $F(x)$. Pokud je $k+1$ ostře větší než $F(x)$, potom $\ell = k+1-F(x)$ je přirozené číslo nižší než $k+1$, a tedy dle indukčního předpokladu jej lze zapsat jako

$$\ell = F(i_1) + F(i_2) + \cdots + F(i_j),$$

kde indexy i_1, i_2, …, i_j jsou různé a nejsou po sobě jdoucí. Potom

$$k + 1 = F(i_1) + F(i_2) + \cdots + F(i_j) + F(x).$$

Tvrdíme, že Fibonacciho čísla v součtu jsou různá a nenásledují po sobě. Dokážeme to sporem. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $i_1 < i_2 < \cdots < i_j$. Protože $F(x)$ je největší Fibonacciho číslo, které je nižší než $k + 1$, tak je $F(i_j)$ jistě menší nebo rovno $F(x)$. Proto nám stačí ukázat, že i_j a x nejsou po sobě jdoucí. Pro spor připusťme, že $F(x-1) \leq F(i_j)$. Potom však

$$\begin{aligned}
k + 1 &= F(i_1) + F(i_2) + \cdots + F(i_j) + F(x) \\
&\geq F(i_1) + F(i_2) + \cdots + F(x - 1) + F(x) \\
&\geq F(x - 1) + F(x) \\
&= F(x + 1),
\end{aligned}$$

což je požadovaný spor. Takže jsme našli vhodná Fibonacciho čísla pro $k+1$, a tím jsme dle principu silné indukce hotovi. □

Poznámka. Všimni si, že k důkazu by nám nestačilo, že $S(k)$ platí. O čísle ℓ totiž nic moc nevíme, jen to, že je menší než $k + 1$.

[4] Přijdeš na to, čím jsou tato čísla zajímavá?

Ještě více Fibonacciho čísel

Fibonacciho posloupnost má mnoho krásných vlastností. Zkus si některé z nich dokázat!

Cvičení 13. Ukaž, že pro všechna pro všechna přirozená čísla n platí

$$F(n-1)F(n+1) = F(n)^2 + (-1)^n.$$

Cvičení 14. Nechť $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + \frac{1}{1}$, $t_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, ... Ukaž, že $t_n = \frac{F(n+1)}{F(n)}$.

Poznámka. Posloupnost $t_1, t_2, \ldots$ se postupně „přibližuje" řešení rovnice $t = 1 + \frac{1}{t}$. Tu můžeme upravit na rovnici $t^2 - t - 1 = 0$, jejímž kladným kořenem je *zlatý řez* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Proto se poměr dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel postupně blíží zlatému řezu.

Úloha 9. Ukaž, že pokud $m \mid n$, tak $F(m) \mid F(n)$.

Cauchyho indukce aneb cesta tam a zase zpátky

Ačkoli není nijak závratně používaná, tato varianta matematické indukce ukazuje, jak flexibilní a silná dokáže indukce být. Tuto metodu posléze použijeme pro dokázání známé AG-nerovnosti. Bez většího otálení pojďme na to!

Chceme dokázat, že tvrzení $C(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

(1) Provedeme základní krok: dokážeme $C(1)$.
(2) Následuje indukční krok, který tu má *dvě* části.
  Tam: Ukážeme implikaci „pokud platí $C(k)$, tak platí i $C(2k)$".
  Zpátky: Ukážeme implikaci „pokud platí $C(m)$, tak platí i $C(m-1)$".
(3) Potom tvrzení $C(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n podle Cauchyho indukce.

Indukční krok **tam** zajišťuje, že tvrzení je pravdivé pro stále větší n, zanechává však značné mezery uprostřed. O ty se postará indukční krok **zpátky**.

AG-nerovnost

Známá a v olympiádách hojně využívaná nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem přímo vybízí k důkazu matematickou indukcí. Běžným způsobem to ovšem nepůjde!

Věta. (AG-nerovnost) *Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom platí, že jejich aritmetický průměr je větší nebo roven jejich průměru geometrickému:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Důkaz. Všimněme si, že pokud jsou všechna čísla rovna 0, nerovnost automaticky platí. Proto můžeme dále předpokládat, že alespoň jedno číslo je nenulové (a jejich součet je tudíž nenulový, což se hodí, až tímto součtem budeme dělit).

Nejprve uvažme základní kámen $n = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} &\iff (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 x_2 \\ &\iff x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 0 \\ &\iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

což platí vždy, jelikož druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná. Všimněme si také, že rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = x_2$.

Nyní se pusťme do indukčního kroku **tam**. Předpokládejme, že nerovnost platí pro k proměnných. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ je $2k$ nezáporných reálných čísel. Máme

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k}}{2k} &= \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} + \frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}}{2}\\ &\geq \frac{\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} + \sqrt[k]{x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{2k}}}{2}\\ &\geq \sqrt{\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}\,\sqrt[k]{x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{2k}}}\\ &= \sqrt[2k]{x_1x_2\cdots x_{2k}}.\end{aligned}$$

Nerovnosti výše vyplývají postupně z AG-nerovnosti pro k (indukčního předpokladu) a AG-nerovnosti pro 2 (kterou jsme již ukázali).

Tedy platí-li AG-nerovnost pro k, pak platí i pro $2k$. Zatím jsme tedy ukázali pravdivost nerovnosti pro $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ a zbývá nám vyplnit mezery. K tomu poslouží indukční krok **zpátky**.

Podle AG-nerovnosti pro m proměnných máme

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m} \geq \sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_m}.$$

Chceme ukázat AG-nerovnost pro $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Dosaďme je do AG-nerovnosti pro m spolu s $x_m = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}}{m-1}$. Potom

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}}{m-1}}{m} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}.$$

AG-nerovnost pro m pak říká

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}}{m-1} \geq \sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_{m-1}\cdot\frac{x_1 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}}.$$

Můžeme obě strany umocnit na m, protože všechny proměnné jsou nezáporné. Dostáváme

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}\right)^m \geq x_1x_2\cdots x_{m-1}\cdot\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}.$$

Vydělíme kladným[5] $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}}{m-1}$, čímž dostaneme

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}\right)^{m-1} \geq x_1x_2\cdots x_{m-1},$$

což následně odmocníme na požadovanou nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}}{m-1} \geq \sqrt[m-1]{x_1x_2\cdots x_{m-1}}.$$

Dle principu Cauchyho indukce jsme hotovi. □

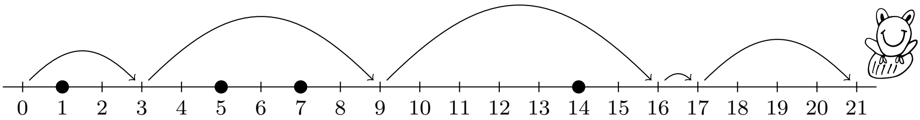
[5] Předpokládali jsme, že součet je nenulový.

IMO 2009/6

Indukce je přítelem chudého.
– staré bangladéšské pořekadlo

V této části si ukážeme rafinované použití indukce na úloze z Mezinárodní matematické olympiády.

Úloha 10. Nechť a_1, a_2, ..., a_{n+1} jsou po dvou různá přirozená čísla. Nechť M je množina n přirozených čísel v intervalu $(0, s)$, kde $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}$. Žába skáče po číselné ose, začíná na bodu 0 a poté udělá $n+1$ skoků doprava o délkách a_1, a_2, ..., a_{n+1} v nějakém pořadí. Dokaž, že může zvolit takové pořadí, že nikdy neskočí na žádné číslo z množiny M.



Řešení. Budeme postupovat indukcí podle n.

Základním krokem je ověřit, že tvrzení platí pro $n = 1$. Máme čísla a_1, a_2 a jedno číslo $m \in M$ z intervalu $(0, a_1 + a_2)$, kterému se chceme vyhnout. Jelikož jde jen o jedno číslo a čísla a_1, a_2 jsou různá, tak m může být nanejvýš jedno z těchto čísel. Pokud je různé od obou, jsme hotovi, a pokud je rovno jednomu z nich, zvolíme jako první skok to druhé číslo, čímž se číslu m hravě vyhneme. Tedy tvrzení pro $n = 1$ platí.

Pro indukční krok předpokládejme, že $n \geq 1$ a že tvrzení platí pro 1, 2, ..., $n-1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_1 < \cdots < a_{n+1}$. Nechť m je nejmenší prvek M. Situaci rozdělíme na dva případy.

Případ 1: $m < a_{n+1}$

Nejprve předpokládejme, že $a_{n+1} \notin M$. Potom můžeme pro začátek poskočit o a_{n+1}. Přeskočili jsme m a použili jsme jeden skok, zbývají tedy $a_1, \ldots, a_n$ a nanejvýš $n-1$ čísel v M. Dle indukčního předpokladu toto již přeskákat lze.

Nyní nechť tedy $a_{n+1} \in M$. Uvažme následujících n dvojic: $(a_1, a_1 + a_{n+1}), \ldots, (a_n, a_n + a_{n+1})$. Je-li nějaké z čísel ve dvojicích v M, pak je i v $M \setminus \{a_{n+1}\}$, protože $a_i < a_{n+1} < a_i + a_{n+1}$ pro všechna $1 \leq i \leq n$. V $M \setminus \{a_{n+1}\}$ je ovšem jen $n-1$ členů, a proto existuje aspoň jedna dvojice, z níž ani jedno číslo není v $M \setminus \{a_{n+1}\}$. Označme ji $(a_k, a_k + a_{n+1})$. Pokud žabka udělá první dva skoky o délkách a_k a a_{n+1}, přeskočí jednak m, jednak a_{n+1}, což jsou obě čísla z množiny M. A před žabkou nyní stojí úkol vyhnout se $n-2$ číslům množiny $M \setminus \{m, a_{n+1}\}$ pomocí $n-1$ skoků délek a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n, což má řešení podle indukčního předpokladu.

Případ 2: $m \geq a_{n+1}$

Tento případ vyřešíme obráceně. Představíme si, že žába musí přeskákat z čísla $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}$ k nule. Pokud najdeme takovou cestu, můžeme ji vzít i pozpátku a jsme hotovi.

Podle indukčního předpokladu dokáže žabka udělat n skoků o délkách $a_1, \ldots, a_n$, aniž by skočila na nějaké číslo z množiny $M \setminus \{m\}$. Jestliže se navíc přitom vyhnula i číslu m, tak jednoduše doskočí poslední skok a jsme hotovi. Pokud nějakým skokem doskočila na číslo m, postupujme následovně: dejme tomu, že na m doskočila skokem délky a_k. Potom prohoďme v posloupnosti skoků a_k a a_{n+1}, pak žabka dopadne až za číslo m, to znamená blíže k nule. Díky tomu, že m je nejmenší prvek M, víme, že žádné další nebezpečné číslo už před žabkou neleží a zbylé skoky už můžou být v libovolném pořadí. Tím jsme vyřešili i tento případ.

Matematickou indukcí pak dostáváme, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla.

Cauchyho funkcionální rovnice

Naši pouť zákoutími matematické indukce završíme důkazem světoznámé Cauchyho funkcionální rovnice. Funkcionální rovnice je rovnice, ve které je neznámou přímo funkce, tedy nějaký zobrazení z jedné množiny čísel do druhé.

Příklad. (Cauchyho funkcionální rovnice) Nechť $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ je funkce, která pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ splňuje

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Nalezni všechny takové funkce.

Řešení. Nejprve si všimněme, že všechny funkce tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$, splňují Cauchyho rovnici. Odvážně tvrdíme, že tohoto tvaru jsou všechna řešení Cauchyho rovnice.

Zkusíme položit $k = f(1)$ a hledat řešení rovnice, které bude zahrnovat k. Začneme tím, že položíme $x = y = 0$ a Cauchyho rovnice pak říká, že $f(0+0) = 2f(0)$, tedy $f(0) = 0$. Dále můžeme položit $x = y = 1$ a získat tak $f(2) = f(1) + f(1) = 2k$. Obdobně můžeme pokračovat pro $x = 2$ a $y = 1$ a dostat $F(3) = 3k$. Matematickou indukcí lze dokázat, že $f(n) = kn$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Jak toto rozšířit na záporná celá čísla? Dosaďme do rovnice $x = -n$, $y = n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom $f(0) = f(-n) + f(n)$, takže $f(-n) = -f(n) = k \cdot (-n)$. Dohromady tedy $f(n) = kn$ pro všechna celá čísla n.

Ovšem stále jsme ještě nevyčerpali celý definiční obor funkce f, kterým jsou racionální čísla $\mathbb{Q}$. Zkusme se odrazit od toho, jak bychom určili hodnotu $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Z rovnice vyplývá, že

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = k,$$

z čehož plyne $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2}$.

Inspirováni tímto vidíme, že pro racionální číslo $\frac{p}{q}$, kde a p, q jsou celá čísla a $q > 0$, máme

$$q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = \underbrace{f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{p}{q}\right)}_{q\text{-krát}} = f(p) = kp,$$

a tedy $f\left(\frac{p}{q}\right) = k \cdot \frac{p}{q}$.

Došli jsme k závěru, že všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, které splňují Cauchyho rovnici, jsou tvaru $f(x) = kx$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.

Je nezbytné podotknout, že výběr definičního oboru funkce f je extrémně důležitý a kritický pro řešení úlohy. Náš postup fungoval, jelikož jsme schopni použít indukci na $\mathbb{N}$ a poté ji rozšířit na celou množinu $\mathbb{Q}$. Kdybychom za definiční obor vzali $\mathbb{R}$, náš postup by se zbortil na tom, že nemůžeme indukovat přes celé $\mathbb{R}$. Ba co víc, Cauchyho funkcionální rovnice v $\mathbb{R}$ začne mít opravdu podivná patologická řešení!

Závěrem

Gratulujeme k přečtení celého dílu! Doufáme, že Tě první díl obohatil jak novými znalostmi, tak zkušenostmi v řešení matematických úloh. V příštím díle se můžeš těšit na rigorózní zdůvodnění, proč indukce funguje, na několik axiomů a především na odvození základních aritmetických pravidel pouze na základě těchto axiomů!

My se na oplátku těšíme na Tvoje řešení úloh 1. seriálové série a přejeme mnoho štěstí.

Návody ke cvičením

1. Začni od pravé strany.

2. Vyjde součet $\frac{n}{n+1}$.

3. Vyjde $\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$.

4. Vyjde $(n-1)2^n+1$.

5. Po přidání nové kružnice přebarvi její vnitřek.

6. Pro násobky 5. Indukce na k, kde $n=5k$.

8. Použij indukci podle n.

9. Např. pro $n=\frac{1}{2}$ a $x=\pi$ nerovnost neplatí. Fakt, že n je přirozené, využívá z principu samotná indukce!

10. (i) Trojúhelníková nerovnost,
(ii) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $|\cos x| \leq 1$,
(iii) indukční předpoklad.

12. Představ si, že máš důkaz silnou indukcí, kde $S(n)$ je n-té tvrzení. Víš tedy, jak ukázat, že platí-li $S(0)$, $S(1)$, …, $S(n)$, pak platí i $S(n+1)$. Zvol vhodně tvrzení $T(n)$ tak, aby důkaz vypadal tak, že dokážeme $T(n+1)$ pouze s pomocí $T(n)$. Co musí být dané tvrzení $T(n)$?

13. Použij indukci podle n. Vzpomeň si na rekurentní definici Fibonacciho čísel.

14. Všimni si, že $t_{n+1}=1+\frac{1}{t_n}$.

Návody k úlohám

1. Pro základní krok se podívej na zbytky, které čísla dávají po dělení 3 a použij Dirichletův princip. Indukční krok aplikuj několikrát, dokud nedostaneš aspoň 5 skupin, jejichž součet je dělitelný 3^{k-1}. Z nich vyber tři vhodné, jejichž součet bude dělitelný 3^k.

2. Lépe se bude dokazovat silnější tvrzení, a to že hledané číslo je n-ciferné.

3. Někdy je třeba v indukčním kroku předpokládat, že tvrzení platí pro předchozí dvě čísla namísto jednoho, tedy pro n a $n-1$. Této úpravě však musíš přizpůsobit základní krok a ověřit hypotézu pro $n=1$ i pro $n=2$.

4. Pokus se o indukční krok $T(n-1) \to T(n)$, použij substituci $x=\sqrt{n}$. Pro která n indukční krok funguje? Potom ověř ručně pro zbývající malá n.

5. Ukaž ekvivalentní tvrzení, a to „pokud mezi $2n$ body není žádný trojúhelník, tak jsme použili nanejvýš n^2 úseček“. V jazyce grafů[6]: Graf s $2n$ vrcholy, ve kterém není žádný trojúhelník, má nejvýše n^2 hran. V induktivním kroku uvažte dva body spojené úsečkou a zkoumejte, jak mohou vypadat jejich vztahy ke zbylým $2n$ bodům.

6. Lze vždy nalézt úhlopříčku, která celá leží uvnitř n-úhelníka? Potom použij silnou indukci (viz kapitolu *Silná indukce*).

7. Podle předpokladu jde mezi n městy najít město A takové, že do něj vede z každého města přímá cesta nebo cesta přes jedno jiné město. Rozděl města do dvou skupin podle toho, zda z nich do A vede přímá nebo nepřímá cesta. Poté přidej město B a podívej se na cesty z něj/do něj.

8. Nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$ uprav na $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \frac{n}{n+1}$ a použij Bernoulliho nerovnost.

9. Rozmysli si, že to znamená, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $F(k) \mid F(kn)$, kde k je libovolné přirozené číslo. Toto tvrzení pak už určitě rozlouskneš indukcí podle n.

[6] O grafech si můžeš přečíst v seriálu 34. ročníku Letem grafovým světem. *https://prase.cz/archive/34/serial.pdf*