Mnohoúhelníky

3. podzimní série — Termín odeslání: 6. prosince 2021

Úloha 1. (3 body)
Matěj má hromadu rovnostranných trojúhelníků o straně délky 1. Skládá je k sobě tak, že sousedící trojúhelníky se dotýkají vždy celou stranou. Mohl takhle sestavit nějaký 67-úhelník bez děr?

Úloha 2. (3 body)
Hedvika vzala svůj oblíbený pravidelný n-úhelník a nakreslila všechny pravoúhlé trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou vrcholy Hedvičina n-úhelníku. Celkem nakreslila 1200 trojúhelníků. Najděte všechna možná přirozená čísla n, pro která se toto mohlo stát.

Úloha 3. (3 body)
Ukažte a zdůvodněte, že existuje šestiúhelník, který má délky stran 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ne nutně v tomto pořadí) a všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké.

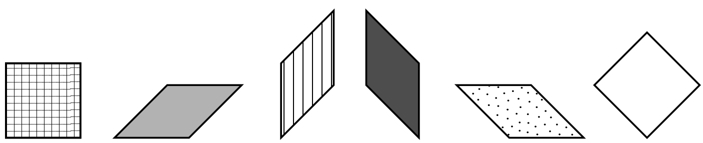
Úloha 4. (5 bodů)
Pětiúhelník $PRASE$ má všechny strany stejně dlouhé a úhly u vrcholů P a E jsou pravé. Označme X průsečík úhlopříček PA a RE, dokažte $|XA| = |XE|$.

Úloha 5. (5 bodů)
Na soustředění bylo n účastníků a n orgů, kde $n \geq 2$. Každý z nich se postavil do jednoho vrcholu pravidelného $2n$-úhelníku. V každém vrcholu stojí buď účastník, nebo org. Potom na zem nakreslili úsečky; mezi každou dvojicí účastníků nakreslili modrou úsečku a mezi každou dvojici orgů červenou. Ukažte, že pro libovolné reálné d je na zemi stejně modrých úseček délky d jako červených úseček délky d.

Úloha 6. (5 bodů)
Mějme čtverec $ABCD$ o délce strany 1. Na stranách BC a CD leží postupně body E a F splňující $|\sphericalangle EAF| = 45°$. Dokažte, že obvod trojúhelníku ECF je 2.

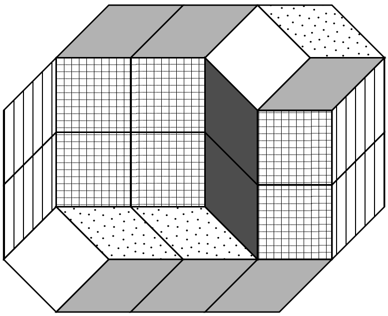
Úloha 7. (5 bodů)
Mnohoúhelník nazveme *pěkným*, pokud jsou délky jeho stran po dvou různé, velikosti jeho vnitřních úhlů ve stupních jsou celá čísla a lze mu opsat kružnici. Rozhodněte, zda existuje pěkný 19-úhelník a zda existuje pěkný 20-úhelník.

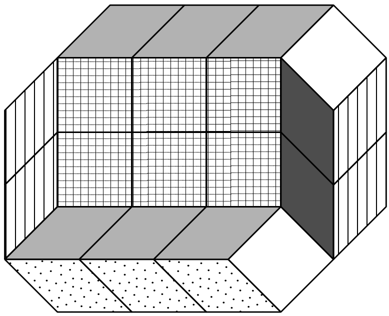
Úloha 8. (5 bodů)
Majda a Pepa chtějí vydláždit podlahy svých koupelen, které mají stejný tvar. Podlaha má tvar osmiúhelníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou stejné. Pro vydláždění mají k dispozici těchto šest typů dlaždiček, které musí být orientované jako na obrázku (nesmí se otáčet):



Všechny dlaždičky mají délku stran 1 a jsou to buď čtverce, nebo kosočtverce s jedním úhlem o velikosti 45°.

Majda a Pepa každý vydláždili podlahu jiným vzorem. Ukažte, že oba museli použít stejné počty dlaždiček stejného typu. Vydláždění můžou vypadat například takto:





Mnohoúhelníky

3. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

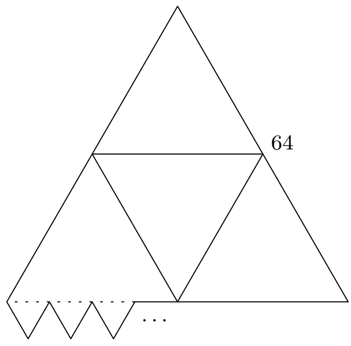
Matěj má hromadu rovnostranných trojúhelníků o straně délky 1*. Skládá je k sobě tak, že sousedící trojúhelníky se dotýkají vždy celou stranou. Mohl takhle sestavit nějaký* 67*-úhelník bez děr?*

(Klára „Klátra“ Pernicová)

Řešení:

Ze čtyř trojúhelníčků se stranou délky 1 lze snadno složit jeden se stranou délky 2. Ze čtyř takových zase složíme rovnostranný trojúhelník se stranou délky 4. Pokud to zopakujeme ještě čtyřikrát, získáme rovnostranný trojúhelník se stranou délky 64.

Když potom budeme k jedné straně postupně od vrcholu lepit trojúhelníčky o straně délky 1, s každým z nich vzroste počet stran o 2. Po nalepení 32 trojúhelníčků tak získáme 67-úhelník, jak jsme chtěli.



Poznámky:

Téměř všichni si s úlohou poradili. Sešla se spousta různých pěkných řešení. *(Václav Janáček)*

Úloha 2.

Hedvika vzala svůj oblíbený pravidelný n-úhelník a nakreslila všechny pravoúhlé trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou vrcholy Hedvičina n-úhelníku. Celkem nakreslila 1200 *trojúhelníků. Najděte všechna možná přirozená čísla n, pro která se toto mohlo stát.* *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

Jelikož je Hedvičin n-úhelník pravidelný, lze mu opsat kružnici k. Aby trojúhelník s vrcholy ve vrcholech n-úhelníku byl pravoúhlý, musí jeho přepona díky Thaletově větě být průměrem k. Třetí vrchol potom smí být libovolný ze zbývajících. Aby některá úhlopříčka n-úhelníku byla průměrem k, musí být n sudé. Takových úhlopříček je potom $\frac{n}{2}$. Ke každé úhlopříčce můžeme zvolit $n-2$ vrcholů, u nichž bude pravý úhel. Tímto způsobem jsme každý pravoúhlý trojúhelník našli právě jednou, protože každý pravoúhlý trojúhelník má právě jednu přeponu.

Hedvika nakreslila všechny pravoúhlé trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech jejího n-úhelníku a nakreslila jich 1200. Musí tedy platit

$$\frac{n}{2} \cdot (n-2) = 1200,$$

což je kvadratická rovnice. Její dva kořeny buď můžeme vypočítat pomocí vzorce, nebo si všimneme, že kořeny jsou -48 a 50 a další už existovat nemohou. Protože n musí být přirozené, vyhovuje pouze $n = 50$.

Poznámky:

Došla spousta správných řešení. Nejčastější chybou bylo nepořádné přečtení zadání, při němž řešení počítalo, pro která n Hedvika nakreslí *alespoň* 1200 trojúhelníků místo *právě* 1200 trojúhelníků.

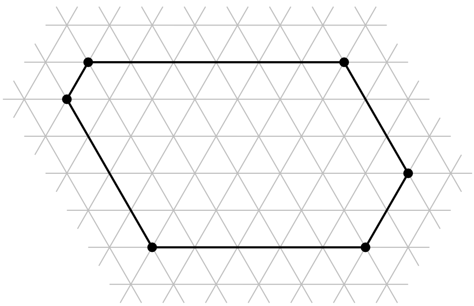
(Magdaléna Mišinová)

Úloha 3.

Ukažte a zdůvodněte, že existuje šestiúhelník, který má délky stran 1, 2, 3, 4, 5, 6 *(ne nutně v tomto pořadí) a všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké.* *(Terka Kučerová)*

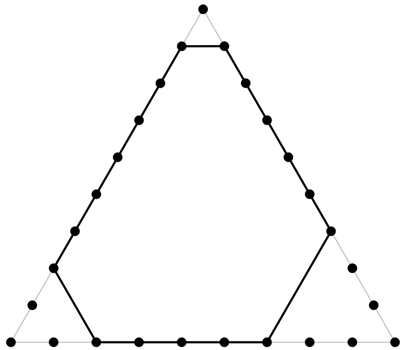
Řešení trojúhelníkovou mřížkou:

Na obrázku vidíme jednotkovou trojúhelníkovou mřížku a v ní šestiúhelník, jehož délky stran jsou postupně 1, 6, 3, 2, 5, 4. Z vlastností trojúhelníkové mřížky plyne, že všechny vnitřní úhly mají velikost 120°.



Řešení pomocí rovnostranných trojúhelníků:

Začneme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 9 a odřízneme z jeho rohů rovnostranné trojúhelníky o délkách stran 1, 2 a 3. Zbyde nám šestiúhelník, jehož délky stran jsou postupně 1, 6, 2, 4, 3, 5. Vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku mají velikost 60°, takže všechny vnitřní úhly získaného šestiúhelníku mají velikost 120°.



Poznámky:
Hledaný šestiúhelník nalezla většina řešitelů bez potíží, horší ale bylo ukázat, že má skutečně všechny úhly stejně velké. Velká část řešitelů pouze našla nějaké nutné podmínky, které musí hledaný šestiúhelník splňovat, ale už neukázala, že jsou dostatečné. Dokázat, že mají všechny úhly správnou velikost, šlo mnoha způsoby. Kromě výše popsaných metod bylo také možné spočítat úhly pomocí analytické geometrie nebo požadované vlastnosti nahlédnout sčítáním vektorů.

(Josef Minařík)

Úloha 4.

Pětiúhelník $PRASE$ má všechny strany stejně dlouhé a úhly u vrcholů P a E jsou pravé. Označme X průsečík úhlopříček PA a RE, dokažte $|XA| = |XE|$. *(Josef Minařík)*

Řešení:
V čtyřúhelníku $PRSE$ máme tři stejně dlouhé strany (RP, PE, ES) a dva pravé úhly mezi nimi ($\sphericalangle RPE$ a $\sphericalangle PES$), tedy se už nutně jedná o čtverec. Proto i úsečka RS má stejnou délku jako strany pětiúhelníku $PRASE$. Jinak řečeno trojúhelník RAS je rovnostranný.

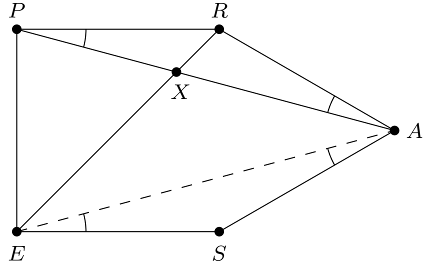
Povšimneme si, že trojúhelníky PRA a ESA jsou rovnoramenné ($|PR| = |RA|$) a mají stejný úhel u vrcholu R, respektive S, a to $|\sphericalangle PRA| = |\sphericalangle PRS| + |\sphericalangle SRA| = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$(obdobně pro $|\sphericalangle ESA|$). Odtud

$$|\sphericalangle RAP| = |\sphericalangle RPA| = |\sphericalangle SEA| = |\sphericalangle SAE| = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Dále už jen dopočteme $|\sphericalangle XAE| = |\sphericalangle SAR| - |\sphericalangle PAR| - |\sphericalangle EAS| = 60^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. Protože ER je úhlopříčka ve čtverci, tak $|\sphericalangle RES| = 45^\circ$, tedy

$$|\sphericalangle XEA| = |\sphericalangle RES| - |\sphericalangle AES| = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ = |\sphericalangle XAE|.$$

Trojúhelník AXE je tedy rovnoramenný a platí $|XE| = |XA|$, jak jsme chtěli dokázat.



Alternativní řešení:
Obdobně jako v prvním řešení odvodíme, že $PRSE$ je čtverec a RAS je rovnostranný trojúhelník. Dále víme, že $|PR| = |RS| = |RA|$, tedy body P, S, A leží na kružnici se středem v R. Ze vztahu obvodového a středového úhlu tak dostáváme $|\sphericalangle PAS| = \frac{|\sphericalangle PRS|}{2} = 45°$. A jelikož RE je úhlopříčka, tak také $|\sphericalangle RES| = 45°$. Podíváme-li se na čtyřúhelník $ESAX$ vidíme, že $|ES| = |SA|$ a $|\sphericalangle XES| = |\sphericalangle XAS|$. Celý čtyřúhelník je tak souměrný dle osy úhlu u S, a tedy $|XE| = |XA|$, jak jsme chtěli.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla úplně správně a ubírala se jedním ze dvou vzorových řešení. Někteří řešili i případ, kdy bod A ležel uvnitř čtyřúhelníku $PRSE$, což zadání nutně nepožadovalo, protože v takovém případě se úhlopříčky PA a RE neprotnou jakožto úhlopříčky/úsečky. Ale nebylo to úplně jasné, a tak se omlouváme, že nám ze zadání utekla informace, že je zadaný pětiúhelník konvexní. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 5.

Na soustředění bylo n účastníků a n orgů, kde $n \geq 2$. Každý z nich se postavil do jednoho vrcholu pravidelného $2n$-úhelníku. V každém vrcholu stojí buď účastník, nebo org. Potom na zem nakreslili úsečky; mezi každou dvojicí účastníků nakreslili modrou úsečku a mezi každou dvojici orgů červenou. Ukažte, že pro libovolné reálné d je na zemi stejně modrých úseček délky d jako červených úseček délky d. *(Radek Olšák)*

Řešení:
Nejprve si všimněme, že náš $2n$-úhelník je symetrický. Tedy pokud z nějakého vrcholu vede k úseček délky d, vede z každého vrcholu k úseček délky d. Zafixováním konkrétního d získáme jednoznačně určený počet sousedů k jednoho vrcholu v dané vzdálenosti d:

(1) $k = 0$, pak se daná úsečka v našem $2n$-úhelníku vůbec nevyskytuje,
(2) $k = 2$, potom povede z každého vrcholu jedna úsečka délky d doprava a jedna doleva,
(3) $k = 1$ nastane, pokud tyto dvě úsečky délky d splynou, tedy právě pro d rovno průměru kružnice opsané daného $2n$-úhelníku a pro $d = 0$

a jiná k zřejmě nevyhovují.

Odebírání incidencí:
Případ $k = 0$ je triviální, jelikož máme nula modrých i červených úseček. Nyní rozeberme případ $k = 2$, případ $k = 1$ bude analogický.

Díky tomu, že z účastníků i z orgů vede $2n$ hran, máme $2n$ incidencí hrana-účastník a $2n$ incidencí hrana-org. Máme zde tři typy hran: modré, červené nebo bezbarvé, což jsou ty, které mají oba konce z různé skupinky (orgové/účastníci). Každá modrá úsečka obsahuje dva účastníky, tedy spotřebuje dvě incidence hrana-účastník, obdobně každá červená dvě incidence hrana-org. Bezbarvá hrana pak spotřebuje jednu incidenci hrana-org a jednu incidenci hrana-účastník.

Nazvěme počet modrých hran m, počet červených hran $č$ a počet bezbarvých hran b. Bezbarvá hrana odebere vždy jednu incidenci oběma skupinkám. Zbylé incidence se tudíž u účastníků musí vyskytovat v modrých hranách a u orgů v červených, v každé hraně jsou ale dvě incidence, tedy pro spočítání počtu hran musíme dělit dvěma. Získáváme tak $m = \frac{2n-b}{2} = č$, máme tedy stejně modrých a červených hran.

V případě $k = 1$ máme n incidencí hrana-org a n incidencí hrana-účastník, takže podobně jako v prvním případě můžeme spočítat, že platí $m = \frac{n-b}{2} = č$.

Prohazování:
Idea za prohazovacím důkazem bude následující: nejprve najdeme jedno rozestavení účastníků a orgů, pro které zadání platí triviálně. V druhém kroku ukážeme, že dostaneme-li libovolné rozestavení, nezmění se prohozením dvou sousedních osob rozdíl mezi počty modrých a červených úseček

délky d. Z našeho „dobrého“ rozestavení pak pomocí prohazování dostaneme libovolné rozestavení, takže počet modrých a červených úseček musí být i obecně stejný.

První krok je tedy najít triviální případ, pro který zadané tvrzení platí. Můžeme si vybrat ze spousty možností – například dát za sebe všechny účastníky a potom všechny orgy. Tím nám vzniknou dva shodné útvary, jeden z účastníků, jeden z orgů, a tím pádem zde bude všech úseček libovolných délek stejně.

Druhý krok je ukázat, že pokud prohodíme dvě sousední osoby, nezmění se rozdíl počtů červených a modrých úseček. Pokud by osoby, které se snažíme prohodit, byly ze stejné skupinky, nic se nezmění, protože výměna orga za orga či účastníka za účastníka nezmění stav $2n$-úhelníku. Proto nás zajímá pouze případ, kdy prohazujeme orga O s účastníkem U. Jediné, co se tím změní, jsou úsečky délky d sousedící s O a U.

Nechť má účastník U u sebe m modrých úseček délky d a zbytek bezbarvých, zatímco org O má u sebe $č$ červených úseček délky d a zbytek bezbarvých. Počet červených a modrých úseček délky d u vrcholů U a O se tedy liší o $č - m$. Po prohození se u U změní modré úsečky na bezbarvé a bezbarvé na červené, analogicky u O červené na bezbarvé a bezbarvé na modré. Nový počet modrých úseček délky d vůči U a O je tedy $k - č$ a počet červených je $k - m$. Tyto počty se ale opět liší o $(k - m) - (k - č) = č - m$, což jsme chtěli dokázat.

Pro d rovno délce strany zůstane hrana mezi U a O bezbarvá. Počet modrých úseček délky d vůči U a O bude tedy $k - č - 1$ a počet červených bude $k - m - 1$, jejich rozdíl zůstane stále $č - m$.

Nyní už pouze stačí říct, že prohazováním dvou sousedních osob umíme dostat libovolné rozestavení orgů a účastníků. Očíslujme si pozice našeho $2n$-úhelníku 1 až $2n$, kde na začátku jsou na prvních n pozicích účastnici a potom orgové.

Nyní se podívejme, na jakých pozicích mají být účastnici v kýžené konfiguraci. Vezměme si největší pozici, kde má být účastník. Poté prohazujme n-tého účastníka na tuto pozici směrem k větším indexům. Jako další krok vezměme předposledního účastníka ($(n-1)$-tého) a prohazujme ho na druhou největší pozici stejným směrem. Vždy tedy vezmeme účastníka s k-tým největším indexem v původním rozestavení a pošleme ho na k-tou největší pozici účastníků v kýžené konfiguraci směrem k vetším indexům. Takto prohazujme účastníky, dokud každý nedorazí na svoje předepsané místo. Víme, že žádný k-tý účastník už neovlivní svým prohozením vyšší kamarády, protože ti už jsou určitě na vyšší pozici, než kam se on sám snaží dostat. Pokud jsou správně všichni účastníci, jsou určeni i všichni orgové, takže skutečně umíme dostat libovolnou konfiguraci a jsme hotovi.

Poznámky:

Většina řešení se dostala k téměř plnému počtu bodů a odpovídala více méně prvnímu či druhému vzorovému řešení. Častou chybou bylo opomíjení případu, kdy můžeme mít $k = 1$. Ač je řešení analogické, ke kompletnímu řešení bylo potřeba si uvědomit, že takový případ existuje.

(Filip Čermák)

Úloha 6.

Mějme čtverec $ABCD$ o délce strany 1. Na stranách BC a CD leží postupně body E a F splňující $|\sphericalangle EAF| = 45^\circ$. Dokažte, že obvod trojúhelníku ECF je 2. *(Josef Minařík)*

Řešení:

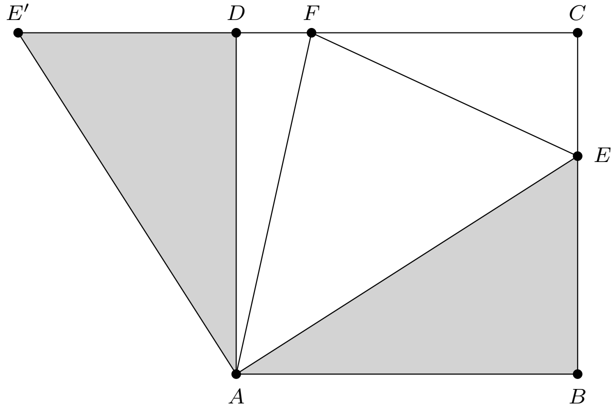
Protože $|AB| = |AD| = 1$, můžeme trojúhelník ABE otočit tak, aby AB splynula s AD. Obraz bodu E v tomto otočení označme E'. Následně máme

$$|\sphericalangle FAE'| = |\sphericalangle FAD| + |\sphericalangle DAE'| = |\sphericalangle FAD| + |\sphericalangle BAE| = 90^\circ - |\sphericalangle EAF| = 45^\circ.$$

Proto z věty *sus* plyne, že $EAF \cong E'AF$, poněvadž $|AE| = |AE'|$, $|\sphericalangle FAE'| = |\sphericalangle EAF| = 45^\circ$ a trojúhelníky sdílí stranu AF. Pak pro obvod trojúhelníku EFC platí

$$\begin{aligned} O_{EFC} &= |CF| + |CE| + |FE| = |CF| + |CE| + |FE'| = |CF| + |CE| + |FD| + |DE'| = \\ &= |CF| + |FD| + |BE| + |EC| = |CD| + |BC| = 2, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.



Poznámky:
Úloha má mnoho hezkých řešení, další hezké řešení plyne z následujícího pozorování: Obraz bodu C, resp. D, podle AE, resp. AF, je pata kolmice v trojúhelníku AEF z vrcholu A.

Další časté řešení (za mě méně pěkné) bylo vyjádření BE, resp. DF, pomocí tangentu příslušného úhlu u vrcholu A a dosazení do Pythagorovy věty pro ECF. *(„madam Verča" Hladíková)*

Úloha 7.

Mnohoúhelník nazveme pěkným, pokud jsou délky jeho stran po dvou různé, velikosti jeho vnitřních úhlů ve stupních jsou celá čísla a lze mu opsat kružnici. Rozhodněte, zda existuje pěkný 19-úhelník a zda existuje pěkný 20-úhelník. *(Radek Olšák)*

Řešení:
Ukážeme, že pěkný 20-úhelník existuje, ale pěkný 19-úhelník nikoliv.

Posloupnost různých kladných reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ nazveme *krásnou*, pokud se její součet rovná 360 a zároveň jsou $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ pro $1 \leq i \leq n$ celá čísla (kde $x_{n+1} = x_1$). Dokážeme nejprve, že pěkný n-úhelník existuje právě tehdy, existuje-li krásná n-tice.

Předpokládejme, že máme tětivový n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ s kružnicí opsanou k se středem S. Označme velikost orientovaného úhlu[1] $\sphericalangle(SA_i, SA_{i+1})$ jako α_i. Potom zřejmě musí platit

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 360^\circ.$$

Zároveň je z věty o obvodovém a středovém úhlu obvodový úhel odpovídající (orientovanému) oblouku A_iA_{i+1} roven $\frac{1}{2}\alpha_i$. Oblouku A_iA_{i+2} tedy odpovídá obvodový úhel $\frac{1}{2}\left(\alpha_i + \alpha_{i+1}\right)$. To znamená, že můžeme vyjádřit

$$|\sphericalangle A_iA_{i+1}A_{i+2}| = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\alpha_i + \alpha_{i+1}\right).$$

Je navíc zřejmé, že délky $|A_iA_{i+1}|$ jsou po dvou různé právě tehdy, jsou-li odpovídající středové úhly α_i po dvou různé. Jelikož je i $180 - x$ celé pro libovolné celé x, tak jsme tímto dokázali, že středové úhly pěkného mnohoúhelníku $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tvoří krásnou n-tici. Naopak máme-li krásnou n-tici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, můžeme díky podmínce $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 360^\circ$ zkonstruovat tětivový n-úhelník,

[1] Více o orientovaných úhlech najdeš například ve sborníkovém příspěvku od Mirka Olšáka na *https://prase.cz/lib/398*.

ve kterém odpovídají tato čísla středovým úhlům; z výše uvedeného rozboru pak plyne, že je tento n-úhelník pěkný.

Nyní nám už stačí ukázat, že krásná 20-tice existuje, ovšem krásná 19-tice nikoliv.

Pro spor předpokládejme, že existuje krásná n-tice pro $n = 19$. Potom jsou i čísla

$$\frac{1}{2}(\alpha_{i+2} + \alpha_{i+1}) - \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_i) = \frac{1}{2}(\alpha_{i+2} - \alpha_i)$$

celá pro všechna $1 \leq i \leq 19$. Z toho snadnou indukcí přes k můžeme odvodit, že bereme-li indexy modulo 19, tak $\frac{1}{2}(\alpha_{i+2k} - \alpha_i) \in \mathbb{Z}$ pro všechna i, k. Speciálně tedy platí

$$\frac{1}{2}(\alpha_{i+20} - \alpha_i) = \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \in \mathbb{Z},$$

tudíž dostáváme

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1} + \alpha_i\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1} - \alpha_i\right) \in \mathbb{Z}.$$

Celočíselnost $\frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1} + \alpha_i\right)$ zároveň vynucuje to, že všechna α_i musí mít stejnou paritu, takže díky různosti α_i platí[2]

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{19} \geq 1 + 3 + \cdots + 37 = 361.$$

To je ovšem spor s $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{19} = 360$, takže krásná 19-tice neexistuje.

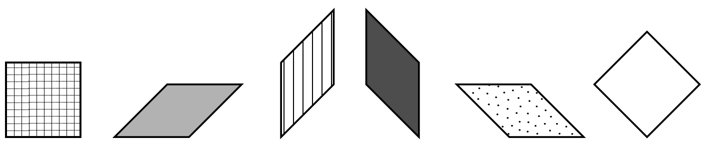
Pro $n = 20$ stačí zvolit $\alpha_i = i - \frac{1}{2}$ pro $1 \leq i \leq 19$ a $\alpha_{20} = 360 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{19}) = 179{,}5$. Pak snadno ověříme, že průměry po sobě jdoucích čísel jsou celé: $\frac{1}{2}\left(\alpha_i + \alpha_{i+1}\right) = i$ pro $1 \leq i \leq 18$, $\frac{1}{2}\left(\alpha_{19} + \alpha_{20}\right) = 99$ a $\frac{1}{2}\left(\alpha_{20} + \alpha_1\right) = 90$, takže naše 20-tice je skutečně krásná.

Poznámky:

Všechna správná řešení postupovala víceméně stejně jako vzorák. Někteří řešitelé akorát kvapně usoudili, že z $\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1}) \in \mathbb{Z}$ už nutně plyne $\frac{1}{2}\alpha_i \in \mathbb{Z}$ pro všechna i, což ovšem není pravda ani pro lichá n. *(Danil Koževnikov)*

Úloha 8.

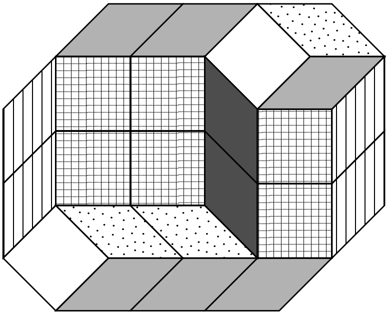
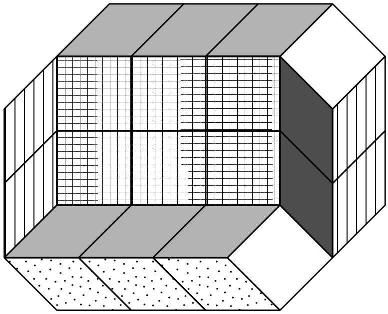
Majda a Pepa chtějí vydláždit podlahy svých koupelen, které mají stejný tvar. Podlaha má tvar osmiúhelníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou stejné. Pro vydláždění mají k dispozici těchto šest typů dlaždiček, které musí být orientované jako na obrázku (nesmí se otáčet):



Všechny dlaždičky mají délku stran 1 a jsou to buď čtverce, nebo kosočtverce s jedním úhlem o velikosti 45°.

Majda a Pepa každý vydláždili podlahu jiným vzorem. Ukažte, že oba museli použít stejné počty dlaždiček stejného typu. Vydláždění můžou vypadat například takto:

[2] Používáme známý vzorec $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, který lze dokázat například indukcí.

(Josef Minařík)

Řešení:
Na začátek si rozmysleme, že pokud se dlaždičky dotýkají v alespoň dvou různých bodech, tak už na sebe přiléhají celou jednou stranou (délky 1). Protože jsou dlaždičky konvexní útvary, tak tyto dva body dotyku musí ležet na jedné straně (jinak by se dlaždičky překrývaly) – dotýkají se tedy kusem jedné strany, bez újmy na obecnosti třeba vodorovné. Pokud by délka dotyku byla menší než 1 (tj. strany na sebe nepřiléhají celé), tak na každé z těchto stran zbyde nějaký nepokrytý vodorovný kus. Na tento nepokrytý vodorovný kus ale musí opět přiléhat nějaká část vodorovné strany jiné dlaždičky, jinak by výsledný útvar nebyl konvexní, protože by u tohoto překryvu byl nekonvexní úhel. Takto jsme ale zase dostali dvě strany, které se nepřekrývají úplně, a celkově bychom takto indukcí mohli sestrojit nekonečnou posloupnost dlaždiček podél této vodorovné přímky, což je spor s tím, že naše podlaha má pevnou konečnou velikost. Pokud se tedy některé dvě dlaždičky netriviálně dotýkají, tak na sebe přiléhají celou jednou stranou. Podobně také na strany koupelny musí dlaždičky přiléhat vždy celou stranou a ne pouze částí. Z toho nám plyne, že každá strana koupelny má celočíselnou délku, která je dána počtem dlaždiček, které na ní přiléhají. Zmiňme, že z toho, že všechny úhly v osmiúhelníku tvořícím podlahu jsou stejné, plyne, že její protější strany musí být rovnoběžné. Dále vzhledem k tvarům dlaždiček a tomu, že musí ke stranám přiléhat, mají tyto strany 4 dané různé směry – svislý, vodorovný a dva šikmé.

Nyní uvažme nějakou dlaždičku, která přiléhá na dolní vodorovnou stranu koupelny. Tato dlaždička má protější horní stranu taktéž vodorovnou a podle prvního odstavce přiléhá touto stranou na dolní vodorovnou stranu nějaké další dlaždičky. Tato další dlaždička má zase protější horní vodorovnou stranu a přiléhá na další dlaždičku, atd. Celkově takto dostaneme posloupnost dlaždiček se dvěma vodorovnými stranami. Ta se musí někdy zastavit, neboť naše koupelna má konečnou velikost a každou dlaždičkou zvětšíme vzdálenost od dolní strany koupelny. Nutně se navíc musí zastavit na horní vodorovné straně koupelny, neboť horní vodorovná strana poslední dlaždičky musí k něčemu přiléhat – a pokud to není další dlaždička, tak to musí být nutně strana koupelny. Tato posloupnost dlaždiček nám tedy určuje vydlážděnou cestu z dolní vodorovné strany koupelny na protější horní vodorovnou stranu koupelny. Pokud si označíme n délku dolní vodorovné strany koupelny, tak na ní přiléhá n různých dlaždiček. Dostaneme tak n různých cest mezi dolní a horní vodorovnou stranou koupelny (žádné dvě takovéto cesty navíc jistě nemají společnou dlaždičku). Dále z toho rovněž plyne, že horní vodorovná strana koupelny musí mít délku n stejně jako ta dolní (jinak bychom z nějaké strany mohli zkonstruoval více cest, což by byl vzhledem k předchozí pozorováním spor). Podobně můžeme cesty mezi protějšími stranami koupelny konstruovat i pro zbylé tři směry – a jejich počet závisí pouze na délkách stran osmiúhelníku. Nyní si můžeme vzít dvě cesty různých směrů (tj. mezi stranami různých směrů). Ty se určitě musí někde protnout (neboť části okraje koupelny, na kterých začínají/končí, jsou střídavě položeny) a určitě se protnou právě v jedné dlaždičce. Nyní učiníme dvě pozorování. Zaprvé dlaždička daná tímto protnutím má jasně daný tvar – musí mít dvě strany rovnoběžné s jedním zvoleným směrem a druhé dvě s tím druhým zvoleným (a když se podíváme na zadané dlaždičky, tak každá dvojice různých směrů určuje právě jednu dlaždičku). Druhé pozorování bude, že tato konstrukce nám dává bijekci mezi dvojicemi cest různých směrů a všemi dlaždičkami na podlaze. Průnik dvou cest totiž jednoznačně určuje dlaždičku a naopak pro každou dlaždičku umíme zrekonstruovat použité cesty postupem z předchozího odstavce.

Spojením získaných úvah můžeme nyní spočítat počet použitých dlaždiček konkrétního typu (daného dvěma směry stran – označme je a a b). Podle dokázané bijekce je totiž stejný jako počet průsečíků cest směru a s cestami směru b. Počet cest směru a je dán délkou strany osmiúhelníku ve směru a (označme tento počet/délku x), podobně počet cest ve směru b je dán délkou strany osmiúhelníku ve směru b (označme y). (Implicitně zde používáme, že protější rovnoběžné strany osmiúhelníku mají stejnou délku a tato definice tak dává smysl.) Dohromady je tak počet dlaždiček našeho typu roven $x \cdot y$. Tento počet je tak závislý pouze na tvaru osmiúhelníku, tedy musí pro libovolné vydláždění vyjít stejně. Tím je úloha dokončena.

Poznámky:

Většina došlých řešení postupovala stejně jako vzorové řešení, nebo alespoň typicky použila klíčovou myšlenku cest mezi protějšími stranami osmiúhelníku. Je důležité si uvědomit, že ačkoli jsou závěry o přiléhání dlaždiček z rozboru na začátku důkazu intuitivně platné, nic ze zadání je negarantuje a je třeba je pořádně dokázat. *(Martin Raška)*