

Matematická indukce 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. ÚNORA 2022

V úloze 2 vycházejte z Peanových axiomů a tvrzení dokázaných v seriálu. Ve zbylých úlohách nemusíte.

ÚLOHA 1.

(5 BODŮ)

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n, k \geq 1$ platí rovnost

$$\sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

ÚLOHA 2.

(5 BODŮ)

Definujeme mocniny jako v druhém dílu seriálu pomocí

$$m^0 = 1, \quad m^{n+1} = m^n m$$

pro $m, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí indukce dokažte pro $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ vztahy

$$m^{n+r} = m^n m^r,$$

$$m^{nr} = (m^n)^r,$$

$$(mn)^r = m^r n^r.$$

ÚLOHA 3.

(5 BODŮ)

Nechť jsou x_1, x_2 navzájem různé kořeny rovnice $x^2 + px - 1 = 0$, kde p je liché celé číslo. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$y_n = x_1^n + x_2^n.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ jsou y_n a y_{n+1} nesoudělná celá čísla.

Matematická indukce 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n, k \geq 1$ platí rovnost

$$\sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

(Kateřina Panešová)

ŘEŠENÍ INDUKCÍ:

Budeme indukovat podle n . Nejprve ověříme platnost pro všechny dvojice $(n, k) = (1, k)$. Dosadíme tedy $n = 1$ do levé strany zadání

$$\sum_{r=1}^1 r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = k! = \frac{k!(k+1)}{k+1} = \frac{(k+1)!}{k+1}.$$

Tudíž pro každou dvojici $(n, k) = (1, k)$ tvrzení platí. Nyní budeme postupovat indukcí, tedy jako indukční předpoklad máme

$$\sum_{r=1}^n \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)}.$$

Budeme postupně upravovat levou stranu zadání pro $n+1$. V druhé rovnosti použijeme indukční předpoklad, čímž získáme

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} &= \frac{n+k!}{n!} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{(n+k)!}{n!} + \frac{(n+k)!}{(n-1)! \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{(k+1) \cdot (n+k)! + n \cdot (n+k)!}{n! \cdot (k+1)} = \frac{(n+k)! \cdot (k+1+n)}{n! \cdot (k+1)} = \frac{(n+k+1)!}{n! \cdot (k+1)}. \end{aligned}$$

To je přesně levá strana pro $n+1$, tedy tvrzení je dokázáno.

ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÝM NEPOČÍTÁNÍM:

Dokazovaný výraz vydělíme $k!$ a přepíšeme si ho do kombinačních čísel. Po úpravě chceme dokázat

$$\sum_{r=1}^n \binom{r+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}.$$

Pravá strana z definice počítá, jak vybrat $n+1$ míčků z řady $n+k$ míčků. Levá strana počítá totéž vyzkoušením všech n možností výběru míčku, který bude mezi vybranými nejvíc vpravo. Ten bude $r+k$ -tý pro nějaké r od 1 do n , protože se před něj ještě musí vejít k míčků. Ze všech $(r+k-1)$ míčků před ním pak potřebujeme dovybrat zbylých k . Oba výrazy se tedy rovnají.

ŘEŠENÍ DISKRÉTNÍM KALKULEM¹:

V diskretním kalkulu si definujeme *rostoucí mocninu* pomocí $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$. Ta se v diskretním kalkulu chová podobně jako standardní mocnina ve standardním kalkulu, tedy $\Delta x^{\overline{n}} = nx^{\overline{n-1}}$. Úloha po nás chce spočítat

$$\sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \sum_{r=1}^n r^{\overline{k}}.$$

V diskretním kalkulu má suma roli integrálu, tedy podobně jako ve standardním kalkulu počítáme integrál jako inverz derivace, můžeme v diskretním kalkulu sumu spočítat jako inverz diference. Takže

$$\sum_{r=1}^n r^{\overline{k}} = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1},$$

což jsme přesně chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Indukci, podobně jako v prvním vzorovém řešení, využila většina řešitelů. Jejich řešení byla převážně správná. Někteří si však neuvědomili, že indukci stačilo provést podle n a snažili se ji provádět i podle k . (Radek Olšák)

Úloha 2.

Definujme mocniny jako v druhém dílu seriálu pomocí

$$m^0 = 1, \quad m^{n+1} = m^n m$$

pro $m, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí indukce dokažte pro $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ vztahy

$$\begin{aligned} m^{n+r} &= m^n m^r, \\ m^{nr} &= (m^n)^r, \\ (mn)^r &= m^r n^r. \end{aligned}$$

(Kateřina Panešová)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si připomeňme definice sčítání, násobení a mocnění, které plynou z věty o rekurzi dokázané v seriálu:

$$\begin{array}{ll} (\alpha 1) & m+0 = m, & (\alpha 2) & m+(n+1) = (m+n)+1, \\ (\mu 1) & m0 = 0, & (\mu 2) & m(n+1) = mn+m, \\ (\pi 1) & m^0 = 1, & (\pi 2) & m^{n+1} = m^n m. \end{array}$$

Kromě těchto definic budeme používat také vztahy

$$\begin{array}{ll} (a) & 0+m = m, \\ (b) & 1+m = m+1, \\ (c) & 0m = 0, \\ (d) & 1m = m, \end{array}$$

kteří jsme také dokázali v seriálu.

¹O diskretním kalkulu se lze více dozvědět třeba v těchto sborníkových příspěvcích:
<https://prase.cz/library/DiskretnyKalkulusMSz/DiskretnyKalkulusMSz.pdf>,
<https://prase.cz/library/iKS-KombiIdentityJL/iKS-KombiIdentityJL.pdf>.

Nyní už se můžeme vrhnout na důkaz rovnosti $m^{n+r} = m^n m^r$. Použijeme indukci podle r .
Nechť

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0; m^{n+r} = m^n m^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ověřme, že nula patří do S . Platí

$$\begin{aligned} m^{n+0} &= m^n && \text{podle } (\alpha 1) \\ &= 0 + m^n && \text{podle } (a) \\ &= m^n \cdot 0 + m^n && \text{podle } (\mu 1) \\ &= m^n(0 + 1) && \text{podle } (\mu 2) \\ &= m^n \cdot 1 && \text{podle } (a) \\ &= m^n m^0 && \text{podle } (\pi 1), \end{aligned}$$

takže $0 \in S$. Nyní předpokládejme, že $r \in S$. Potom

$$\begin{aligned} m^{n+(r+1)} &= m^{(n+r)+1} && \text{podle } (\alpha 2) \\ &= m^{n+r} m && \text{podle } (\pi 2) \\ &= (m^n m^r) m && \text{podle indukčního předpokladu} \\ &= m^n (m^r m) && \text{podle **asociativity násobení**} \\ &= m^n m^{r+1} && \text{podle } (\pi 2), \end{aligned}$$

a proto i $(r + 1) \in S$. Z třetího Peanova axiomu potom plyne, že $S = \mathbb{N}_0$, což jsme chtěli ukázat.

Dále chceme ukázat rovnost $m^{nr} = (m^n)^r$. Opět použijeme indukci podle r . Definujme

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0; m^{nr} = (m^n)^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Pro $r = 0$ platí

$$\begin{aligned} m^{n0} &= m^0 && \text{podle } (\mu 1) \\ &= 1 && \text{podle } (\pi 1) \\ &= (m^n)^0 && \text{podle } (\pi 1), \end{aligned}$$

a tedy $0 \in S$. Nyní předpokládejme, že r je v S . Potom pro $r + 1$ platí

$$\begin{aligned} m^{n(r+1)} &= m^{nr+n} && \text{podle } (\mu 2) \\ &= m^{nr} m^n && \text{podle první dokázané rovnosti} \\ &= (m^n)^r m^n && \text{podle indukčního předpokladu} \\ &= (m^n)^{r+1} && \text{podle } (\pi 2), \end{aligned}$$

takže $(r + 1) \in S$. Z třetího Peanova axiomu máme $S = \mathbb{N}_0$, tj. rovnost platí pro všechna přirozená čísla.

Pojďme nyní dokázat třetí rovnost, a sice $(mn)^r = m^r n^r$, indukci podle r . Buď

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0; (mn)^r = m^r n^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Nejprve si všimněme, že

$$\begin{aligned} (mn)^0 &= 1 && \text{podle } (\pi 1) \\ &= 1 \cdot 1 && \text{podle } (d) \\ &= m^0 n^0 && \text{podle } (\pi 1), \end{aligned}$$

z čehož $0 \in S$. Pokud $r \in S$, tak platí

$$\begin{aligned}
 (mn)^{r+1} &= (mn)^r(mn) && \text{podle } (\pi 2) \\
 &= (m^r n^r)(mn) && \text{podle indukčního předpokladu} \\
 &= (m^r n^r)(nm) && \text{podle komutativity násobení} \\
 &= m^r(n^r(nm)) && \text{podle asociativity násobení} \\
 &= m^r((n^r n)m) && \text{podle asociativity násobení} \\
 &= m^r(m(n^r n)) && \text{podle komutativity násobení} \\
 &= (m^r m)(n^r n) && \text{podle asociativity násobení} \\
 &= m^{r+1} n^{r+1} && \text{podle } (\pi 2),
 \end{aligned}$$

a proto i $(r + 1)$ náleží S . Potom třetí Peanův axiom říká, že $S = \mathbb{N}_0$ neboli že rovnost platí pro všechna přirozená čísla r , což jsme chtěli ukázat.

POZNÁMKY:

Ve vzorovém řešení jsem používala vždy co nejnižší možný předpoklad: například raději použiji vztah, který vyplývá z definice, než vztah dokázaný později v seriálu, pokud je to jen trochu možné. Takto je dobře vidět, že důkaz určité vlastnosti třeba závisí na asociativitě, ale už není potřeba komutativita, i když bychom ji samozřejmě do důkazu uměli nějak „nacpat“. Ve Tvém řešení však plně stačí, když použiješ jakékoli tvrzení již dokázané v seriálu.

Řešitelé často zapomínali zdůvodnit, co z čeho vyplývá. Protože smyslem úlohy bylo napsat opravdu formální důkaz jako v seriálu, byla jsem na tohle spíše přísná. Nejčastější chybou bylo nezmínění využití asociativity v první rovnosti, proto jsem ji ve vzoráku vyznačila tučně. Celkově mám z došlých řešení radost, většina byla velmi pěkná a dobře používala tvrzení již dokázaná v seriálu. (Kateřina Panešová)

Úloha 3.

Nechť jsou x_1, x_2 navzájem různé kořeny rovnice $x^2 + px - 1 = 0$, kde p je liché celé číslo. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$y_n = x_1^n + x_2^n.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ jsou y_n a y_{n+1} nesoudělná celá čísla. (Kateřina Panešová)

ŘEŠENÍ:

Z Viětových vztahů dostaneme

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -1.$$

Podíváme-li se na hodnoty y_0 a y_1 , máme

$$y_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2,$$

$$y_1 = x_1^1 + x_2^1 = -p.$$

Všimněme si, že pro $n \geq 2$ platí

$$y_n = x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = -p y_{n-1} + y_{n-2},$$

čímž jsme získali rekurentní vzorec pro y_n . Použitím indukce teď nejprve dokážeme, že všechna y_n jsou celá:

- (1) y_0 i y_1 jsou celá, protože $y_0 = 2$ a $y_1 = -p$, což je ze zadání celé.
- (2) Předpokládáme, že y_{n-2} i y_{n-1} jsou celá. Vzhledem k rekurentnímu vzorci pro y_n a tomu, že součet i součin celých čísel je stále celým číslem, je i y_n celým číslem.

Indukcí vyřešíme i nesoudělnost po sobě jdoucích y_n :

- (1) y_0 i y_1 jsou nesoudělná, protože $y_0 = 2$ a $y_1 = -p$, což je liché, protože p je ze zadání liché. Liché číslo ale z definice není násobkem 2, což je jediný dělitel y_0 větší než 1.
- (2) Předpokládáme, že y_{n-2} a y_{n-1} jsou nesoudělná. Pro spor dál předpokládejme, že existuje dělitel d čísel y_{n-1} a y_n různý od 1. Z rekurentního vzorce pro y_n víme, že d je zároveň i dělitelem $-py_{n-1} + y_{n-2}$. Vzhledem k tomu, že d je dělitelem y_{n-1} , tak je i dělitelem $-py_{n-1}$. To ale znamená, že d je dělitelem y_{n-2} , jinak by d nemohlo být zároveň dělitel $-py_{n-1} + y_{n-2}$ a $-py_{n-1}$. To je ale v rozporu s předpokladem, že y_{n-2} a y_{n-1} jsou nesoudělná.

POZNÁMKY:

Na vztahy odvozené v řešení pomocí Viětových vztahů jde samozřejmě přijít i přes vyjádření kořenů x_1 a x_2 zadané kvadratické rovnice. Použitím zmíněných vztahů si ale ušetříme dost práce.

Rekurentní vzorec pro y_n šel odvodit mnoha způsoby, většina z nich byla podobná tomu ve vzorovém řešení, tedy spočívaly přibližně ve všimnutí si, že součin $(x_1 + x_2) \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} \right)$ je skoro to, co chceme, a pak se od něj jen odečetlo to, co přebývalo.

Většina řešení, co našla rekurentní vzorec pro y_n , správně zdůvodnila i nesoudělnost po sobě jdoucích y_n . Někteří se opírali o princip použitý v Euklidově algoritmu. Skutečně by tu měl být použitý pouze princip z něj a ne on samotný, protože mimo jiné není zaručeno, že $y_{n-2} > y_{n-1}$. Platí ale zmíněný princip $\text{NSD}(x, y) = \text{NSD}(x, y - x)$.

Mnoho řešení opomnělo zmínit, proč jsou y_n jsou celočíselná. Body jsem za to nestrhával těm, co přišli na rekurentní vzorec pro y_n , protože z něj to lze nahlédnout, ale šla by navrhnout podobná úloha, kde by celočíselnost nebyla samozřejmostí. (Martin Hubata)