Matematická indukce 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE | TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. PROSINCE 2021

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Nechť S je množina s 2021 prvky. Ukažte, že pro každé nezáporné celé číslo $N \in \{0, 1, \ldots, 2^{2021}\}$ lze obarvit všechny podmnožiny S buď červenou, nebo zelenou barvou tak, aby právě N podmnožin bylo červených a aby sjednocení dvou množin stejné barvy mělo tu danou barvu.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Nechť n je přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě a $S(n)$ je jeho ciferný součet. Přirozené číslo nazveme *odřezkem* čísla n, pokud vzniklo odebráním několika cifer (nejméně jedné) z pravého konce zápisu čísla n v desítkové soustavě. Nechť $T(n)$ je součet všech odřezků čísla n. Ukažte, že $n = S(n) + 9T(n)$.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Ittihad připravil n palačinek, ale povedlo se mu je všechny z právě jedné strany připálit. Když už nejsou k jídlu, zahraje si s nimi následující hru. Palačinky rozestaví do řady tak, že některé jsou obrácené bílou a jiné spálenou stranou nahoru. Tah sestává z odebrání palačinky spálené seshora a obrácením jejích přímých sousedů, pokud nějací jsou, na opačnou stranu.[1] Ittihad vyhraje, pokud se mu podaří odebrat všechny palačinky. Pro která uspořádání palačinek lze hru vyhrát?

[1] Přitom dvě palačinky nejsou považovány za přímo sousedící, pokud mezi nimi předtím ležela již odebraná palačinka (tedy po odebrání palačinek vznikají mezery).

Matematická indukce 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nechť S je množina s 2021 prvky. Ukažte, že pro každé nezáporné celé číslo $N \in \{0, 1, \dots, 2^{2021}\}$ lze obarvit všechny podmnožiny S buď červenou, nebo zelenou barvou tak, aby právě N podmnožin bylo červených a aby sjednocení dvou množin stejné barvy mělo tu danou barvu.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Pro libovolnou množinu S řekneme, že obarvení všech jejích podmnožin buď červenou, nebo zelenou barvou je *úhledné*, pokud sjednocení libovolných dvou podmnožin stejné barvy má taktéž stejnou barvu. Pomocí matematické indukce dokážeme pro všechna nezáporná celá čísla k: je-li S množina s k prvky, pak pro každé $N \in \{0, 1, \dots, 2^k\}$ existuje úhledné obarvení podmnožin S s právě N červenými podmnožinami.

Začněme základním krokem. Pro $k = 0$ je $S = \emptyset$ prázdná množina, takže má jen jedinou podmnožinu $\emptyset$. Tvrzení máme dokázat pro $N \in \{0, 1\}$. Pro $N = 0$ jednoduše obarvíme $\emptyset$ zeleně, zatímco pro $N = 1$ obarvíme $\emptyset$ červeně. Podmínka úhlednosti bude v obou případech triviálně splněna.

Nyní proveďme indukční krok. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = \ell$, a dokažme jej pro $k = \ell + 1$. Uvažujme tedy $(\ell+1)$-prvkovou množinu S, BÚNO její prvky označme $S = \{0, 1, 2, \dots, \ell\}$. Dále uvažujme $S' = \{1, 2, \dots, \ell\}$, potom jsou podmnožinami S' přesně ty $P \subseteq S$, které neobsahují 0 jako prvek. Máme dokázat, že existuje úhledné obarvení s přesně $N \in \{0, 1, \dots, 2^{\ell+1}\}$ červenými množinami – rozlišme k tomu dva případy:

(i) $N \leq 2^\ell$. Potom z indukčního předpokladu můžeme úhledně obarvit podmnožiny ℓ-prvkové množiny S' tak, aby bylo použito právě N červených podmnožin. Nahlédněme, že když potom zbylé podmnožiny S (ty, jež obsahují 0) obarvíme zeleně, dostaneme úhledné obarvení podmnožin S.

Máme-li dvě červené podmnožiny $P_1, P_2 \subseteq S$, pak jsou to z provedené konstrukce i podmnožiny S'. Použité obarvení podmnožin S' však bylo úhledné, takže $P_1 \cup P_2$ musí být červená množina.

Obdobně uvažme dvě zelené podmnožiny $P_1, P_2 \subseteq S$. Pokud jsou obě také podmnožinami S', opět musí být $P_1 \cup P_2$ zelená díky úhlednosti obarvení podmnožin S'. Pokud jedna z P_1, P_2 není podmnožinou S' (tedy obsahuje 0), pak ani sjednocení $P_1 \cup P_2$ není podmnožinou S', takže z popsané konstrukce je to zelená množina, jak jsme chtěli. Tímto je dokončen případ $N \leq 2^\ell$.

(ii) $N > 2^\ell$. Označme $N' = 2^{\ell+1} - N$, pak musí být $N' < 2^\ell$. Můžeme tedy stejně jako v prvním případě nalézt úhledné obarvení S, v němž je přesně N' podmnožin červených a $2^{\ell+1} - N' = N$ podmnožin zelených. Když nyní obě barvy prohodíme (z červených podmnožin učiníme zelené a naopak), podmínka úhlednosti se zachová – sjednocení dvou stejnobarevných podmnožin bude mít opět stejnou barvu. Dostaneme přitom obarvení s přesně N červenými podmnožinami, což jsme přesně chtěli. Tím je dokončen případ $N > 2^{\ell}$.

V obou případech jsme úspěšně dokončili indukční krok. Tvrzení tak už musí induktivně platit pro všechna k, speciálně tedy i v případě $k = 2021$.

Alternativní řešení (volně podle Jakuba Šošovičky):
BÚNO budiž naší množinou $S = \{0, 1, \ldots, 2020\}$. Pro $N = 2^{2021}$ nám stačí obarvit úplně všechny podmnožiny červeně, takže nadále uvažujme jen případy $N < 2^{2021}$. Neprázdné podmnožiny $A \subseteq S$ rozlišíme podle toho, jaký mají největší prvek – množinu těch podmnožin, které mají za největší prvek číslo $k \in S$, označíme jako

$$M_k = \{A \subseteq S \mid \max A = k\}.$$

Nahlédněme, že v M_k leží právě 2^k podmnožin množiny S. Aby A měla jako maximální prvek číslo k, musí obsahovat k a zároveň $A \setminus \{k\}$ musí být podmnožina k-prvkové množiny $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Naopak pro libovolné $B \subseteq \{0, 1, \ldots, k-1\}$ je $A = B \cup \{k\}$ prvkem M_k. Množiny $A \in M_k$ jsou tak jednoznačně spárované s $B \subseteq \{0, 1, \ldots, k-1\}$, kterých je 2^k.

Nyní již zkonstruujeme úhledné obarvení právě N podmnožin S pro $N < 2^{2021}$. Takové N pak bude mít ve dvojkové soustavě nanejvýš 2021 číslic, zapíšeme ho tedy jako

$$N = (b_{2020}b_{2019}\ldots b_1 b_0)_2 = \sum_{k=0}^{2020} b_k \cdot 2^k,$$

kde každé b_k je buďto 0, nebo 1 (povolíme, aby zápis čísla začínal nulami). Nyní obarvíme červeně ty podmnožiny S, které leží v M_k pro ta k, pro něž je $b_k = 1$. Všechny ostatní podmnožiny (včetně prázdné, která neleží v žádném M_k) obarvíme zeleně. Díky tomu, že každé M_k obsahuje přesně 2^k podmnožin, skutečně obarvíme

$$\sum_{k=0}^{2020} b_k \cdot 2^k = N$$

podmnožin.

Zbývá ověřit, že toto obarvení bude úhledné. Uvažujme tedy sjednocení dvou stejně barevných podmnožin A, B. Pokud je jedna z nich prázdná, BÚNO $B = \emptyset$, dostaneme $A \cup B = A$, což má opět stejnou barvu. Dále platí

$$\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\},$$

takže pokud $A \in M_a$, $B \in M_b$ pro $a \leq b$, pak nutně $\max(A \cup B) = b$, tedy $A \cup B \in M_b$, což značí, že $A \cup B$ má stejnou barvu jako B.

Poznámky:
Asi dvě třetiny došlých řešení se vydaly podobným směrem jako první vzorové řešení a v nějaké podobě indukovaly podle počtu prvků množiny S. Až na drobná škobrtnutí pak typicky došly zdárného konce. *Jakub Šošovička* si vysloužil imaginární bod za explicitní konstrukci obarvení podle binárního zápisu N.

Zbylá řešení se pak snažila indukovat podle N, tedy přidat jednu množinu k fungujícímu úhlednému obarvení. To se příliš nedařilo, získaná obarvení mnohdy sice zařídila, aby sjednocení dvou červených množin bylo červené, ale už ne, aby i sjednocení dvou zelených bylo zelené. Že jsou tyto pokusy předem odsouzeny k neúspěchu, ilustruje následující protipříklad: máme-li pro $N = 4$ úhledné obarvení, kde právě množiny $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ a $\{1, 2\}$ jsou obarveny červeně, pak nelze vyrobit úhledné obarvení pro $N = 5$ přidáním jedné červené množiny P. Taková P by musela obsahovat prvek různý od 1, 2. Jelikož by $P \cup \{1, 2\}$ musela být také červená, znamenalo by to $\{1, 2\} \subset P$. Jenže potom je červená P sjednocením dvou zelených $P \setminus \{1\}$ a $P \setminus \{2\}$, což je spor.

(Matěj Doležálek)

Úloha 2.

Nechť n je přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě a $S(n)$ je jeho ciferný součet. Přirozené číslo nazveme odřezkem čísla n, pokud vzniklo odebráním několika cifer (nejméně jedné) z pravého konce zápisu čísla n v desítkové soustavě. Nechť $T(n)$ je součet všech odřezků čísla n. Ukažte, že $n = S(n) + 9T(n)$. *(Rado van Švarc)*

Řešení:

Ukážeme dva různé způsoby, jak úlohu vyřešit. Oba využívají matematickou indukci. V prvním řešení budeme postupovat indukcí podle počtu cifer. V druhém indukcí dle samotného čísla n. Výrazu $n = S(n) + 9T(n)$ budeme pro přehlednost říkat *Vztah*.

První řešení:

Nejprve ukážeme, že pokud je číslo n jednociferné, tak Vztah platí. V tomto případě totiž $S(n) = n$ a $T(n) = 0$, tedy rovnost $n = S(n) + 9T(n)$ platí.

Dále předpokládáme, že Vztah platí pro k-ciferná čísla (toto je náš indukční předpoklad). Následně ukážeme, že potom Vztah platí pro $(k + 1)$-ciferná čísla. Zvolme libovolné k-ciferné číslo n_0 a libovolné číslo $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Potom dle indukčního předpokladu platí $n_0 = S(n_0) + 9T(n_0)$. Ukážeme, že pak Vztah platí pro číslo $x = 10 \cdot n_0 + a$.

Všimneme si, že pro ciferný součet x platí $S(x) = S(10 \cdot n_0 + a) = S(n_0) + a$. Pro odřezky čísla x platí rovnost $T(x) = T(10 \cdot n_0 + a) = T(n_0) + n_0$, protože odebereme-li z x pouze poslední cifru, získáme číslo n_0. Ostatní odřezky vzniknou odebráním alespoň dvou cifer, takže jsou to odřezky jak čísla x, tak i čísla n_0, a tedy jsou započítané v $T(n_0)$. Tím je příprava k dokázání Vztahu hotová.

Následující rovnosti plynou z toho co víme o $S(x)$, $T(x)$ a z indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned} S(x) + 9T(x) &= S(10 \cdot n_0 + a) + 9T(10 \cdot n_0 + a) \\ &= S(n_0) + a + 9(T(n_0) + n_0) \\ &= S(n_0) + a + 9T(n_0) + 9 \cdot n_0 \\ &= S(n_0) + 9T(n_0) + a + 9 \cdot n_0 \\ &= n_0 + a + 9 \cdot n_0 \\ &= 10 \cdot n_0 + a. \end{aligned}$$

Jelikož x je $(k + 1)$-ciferné a n_0, a byla zvolena libovolně, Vztah platí pro všechna $(k + 1)$-ciferná čísla. Vztah tedy platí pro libovolné přirozené číslo n.

Druhé řešení:

Nejprve ukážeme, že Vztah platí pro $n = 1$. Pro $n = 1$ je $T(1) = 0$ a $S(1) = 1$. Tedy skutečně $1 = S(1) + 9T(1)$.

Dále předpokládejme, že Vztah platí pro číslo k (to je náš indukční předpoklad), a ukážeme, že pak platí pro číslo $k + 1$.

(1) Nejprve ukážeme, jak postupujeme v případě, kdy poslední cifra k je jiná než 9. Potom platí $S(k + 1) = S(k) + 1$, protože poslední cifra se zvětšila o jedna a ostatní cifry se nezměnily, a $T(k + 1) = T(k)$, neboť jediná cifra, co se změnila, je ta poslední. Tedy z toho, co víme o $S(k + 1)$, $T(k + 1)$ a z indukčního předpokladu plynou následující rovnosti:

$$\begin{aligned} S(k + 1) + 9T(k + 1) &= S(k) + 1 + 9T(k) \\ &= S(k) + 9T(k) + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned}$$

Vztah tedy platí pro $k + 1$.

(2) Nyní ukážeme, jak postupujeme, pokud poslední cifra k je 9. Počet devítek na konci čísla k označme j.

Pro $k+1$ platí $S(k+1) = S(k) + 1 - 9 \cdot j$, neboť z posledních j cifer se staly nuly a $(j+1)$-ní cifra zprava se zvětšila o jedna). Pro odřezky platí $T(k+1) = T(k) + j$, protože odřezky, které vzniknou odebráním j nebo méně cifer z $k+1$, jsou o jedna větší než odřezky vzniklé odříznutím stejného počtu cifer z k. Odřízneme-li z $k+1$ a k alespoň $j+1$ cifer, budou oba odřezky stejné.

Následující rovnosti plynou z toho co víme o $S(k+1), T(k+1)$ a z indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned} S(k+1) + 9T(k+1) &= S(k) + 1 - 9 \cdot j + 9T(k) + 9 \cdot j \\ &= S(k) + 9T(k) + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned}$$

Tedy i v tomto případě Vztah pro $k+1$ platí.

Jelikož jsme ukázali, že Vztah platí pro $k+1$, ať už k vypadá libovolně, tak jsme hotovi a díky matematické indukci Vztah platí pro libovolné přirozené číslo.

Poznámky:
Řešení, která přišla, byla většinou jednoho ze dvou typů. Buď řešitelé dokazovali Vztah indukcí podle počtu cifer čísla (což byl ten jednodušší způsob), nebo podle samotného čísla (tam bylo třeba ohlídat, co se děje při přechodu na vyšší řády). *(Terka Kučerová)*

Úloha 3.

Ittihad připravil n palačinek, ale povedlo se mu je všechny z právě jedné strany připálit. Když už nejsou k jídlu, zahraje si s nimi následující hru. Palačinky rozestaví do řady tak, že některé jsou obrácené bílou a jiné spálenou stranou nahoru. Tah sestává z odebrání palačinky spálené seshora a obrácením jejích přímých sousedů, pokud nějací jsou, na opačnou stranu.[1] Ittihad vyhraje, pokud se mu podaří odebrat všechny palačinky. Pro která uspořádání palačinek lze hru vyhrát?

(Ittihad)

Řešení:
Silnou indukcí ukážeme, že Ittihad umí hru vyhrát právě tehdy, když je počet palačinek otočených spálenou stranou nahoru (dále jen spálených) lichý.

Nejprve dokážeme, že pokud je tento počet sudý, nemá Ittihad šanci vyhrát. Pro základní krok, kdy $n = 1$, máme jednu palačinku, která musí být bílá. Z toho vidíme, že není možné vyhrát.

Nyní předpokládejme, že pro všechna $k \leq n$ je hra nevyhratelná, obsahuje-li řada sudý počet spálených palačinek. Mějme řadu $n+1$ palačinek, z nichž spálených je sudý počet. Vybereme-li jakoukoli spálenou palačinku, počet spálených palačinek nalevo od ní má opačnou paritu než počet spálených palačinek napravo. Po odebrání vybrané palačinky a obrácení jejích dvou přímých sousedů (což změní počet spálených palačinek v každé ze dvou částí o 1) tudíž vzniknou dvě kratší nezávislé řady, z nichž právě jedna obsahuje sudý počet spálených palačinek. Potom dle indukčního předpokladu Ittihad nedokáže odebrat všechny palačinky v „sudé“ řadě a tedy celkově nemůže vyhrát.

Pokud byla odebraná palačinka na kraji, ve zbytku řady je lichý počet spálených palačinek. Po otočení palačinky sousedící s odebranou se tento počet změní o 1, bude tedy opět sudý. Proto ani v tomto případě nelze zbytek odebrat.

Dále ukážeme, že pro lichý počet spálených palačinek už Ittihad může odebrat všechny. V základním kroku máme jednu spálenou palačinku, kterou lze odstranit a tím vyhrát hru.

[1] Přitom dvě palačinky nejsou považovány za přímo sousedící, pokud mezi nimi předtím ležela již odebraná palačinka (tedy po odebrání palačinek vznikají mezery).

Předpokládejme, že pro všechna $k \leq n$ existuje vyhrávající strategie, pokud je počet spálených palačinek v řadě lichý. Uvažme řadu s $n+1$ palačinkami, z nichž spálených je lichý počet. Pak jistě můžeme odebrat takovou palačinku, aby na obou stranách od ní byl sudý počet spálených palačinek. Obrácením dvou sousedních palačinek vzniknou dvě kratší oddělené řady s lichým počtem spálených palačinek, a ty dle předpokladu umíme odebrat.

Tím jsme hotovi.

Poznámky:

Řešitelé často zapomínali ukázat, že nalezená uspořádání, která lze vyhrát, jsou opravdu všechna, což znamená ukázat, že žádná jiná uspořádání vyhrát nelze. Zapomínali také na základní krok v důkazu indukce. Mnoho řešitelů nepoužilo indukci, čímž se jim řešení dost protáhla. Celkově jsem ovšem měla radost z počtu došlých řešení! Většina řešení byla správně a i ta neúplná byla většinou velmi pěkná a našly se mezi nimi zajímavé nápady. *(Kateřina Panešová)*