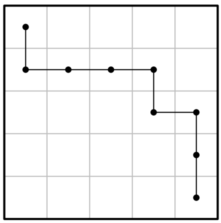
Umění

1. PODZIMNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. ŘÍJNA 2021

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Pavel chce namalovat obraz do tabulky $n \times n$. Každý tah štětcem začíná v levém horním rohovém políčku a následně může pokračovat do dalších políček, štětec se přitom vždy musí posouvat z jednoho políčka do sousedního směrem doprava nebo dolů. Štětec zabarví každé políčko, přes které přejede. Kolik nejméně tahů štětcem musí Pavel provést, aby zabarvil celou tabulku?



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Verča si črtá do skicáře. Nejprve načrtla čtverec $ABCD$ s bodem E ležícím na jeho úhlopříčce AC tak, že $|AE| > |EC|$. Na jeho straně AB potom nakreslila bod F různý od B tak, aby platilo $|EF| = |DE|$. Dokažte, že $\sphericalangle DEF$ je pravý úhel.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Terka zakopla s plechovkou barvy, čímž do 2021 různých bodů na dosud čistém plátně dopadla kapka barvy. Mohlo se stát, že těžištěm každých 41 kapek je opět nějaká kapka? Uvažujme, že kapky jsou body a mají všechny stejnou hmotnost.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Dominik rád kreslí kuželosečky. Zvolí reálná čísla a, b, pro něž parabola $y = x^2 + ax + b$ protíná osy x a y dohromady ve třech různých bodech. Poté nakreslí kružnici, na níž tyto tři body leží. Dokažte, že tato kružnice prochází pevným bodem nezávislým na a, b.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Martin vyplňuje nekonečný čtverečkovaný papír kladnými celými čísly. Chtěl by to provést tak, aby každý čtvereček s číslem k měl mezi svými osmi sousedy přesně k čtverečků, které jsou taktéž vyplněny číslem k. Kolik nejvýše různých čísel může Martin použít?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Danil chce nakoupit n plechovek barvy o celkové hmotnosti $2^n - 1$ kilogramů. Pokud budou jednotlivé plechovky mít kladné reálné hmotnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kilogramů, zaplatí za ně v rámci slevové akce jen

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + a_1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}$$

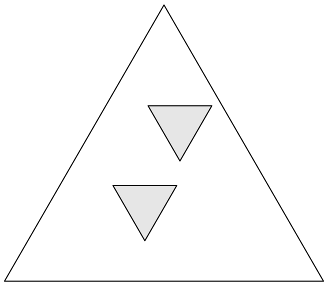
korun. Kolik nejméně může zaplatit, pokud si rozdělení barvy mezi jednotlivé plechovky může zvolit libovolně?

Úloha 7. (5 bodů)

Archeolog Michal objevil jeskynní malbu pravěkých neandrtálců. Zobrazuje trojúhelník ABC, v němž je M střed strany AC a platí $|\sphericalangle CBM| = 2|\sphericalangle ABM|$. Dále je zobrazen vnitřní bod K úsečky BM splňující $|CM| = |CK|$. Dokažte, že $|MK| = |BC|$.

Úloha 8. (5 bodů)

Lenka tvoří moderní umění. Nejprve si načrtne rovnostranný trojúhelník Δ o straně délky $L > 0$ orientovaný špičkou nahoru. Dovnitř trojúhelníku Δ potom nakreslí n rovnostranných trojúhelníčků se stranami délky 1 orientovaných špičkou dolů, z nichž žádné dva se nepřekrývají[1]. Obrázek ukazuje příklad Lenčina výtvoru s $n = 2$.



Dokažte, že ať už bude Lenka kreslit jakkoliv, bude platit $n \leq \frac{2}{3}L^2$.

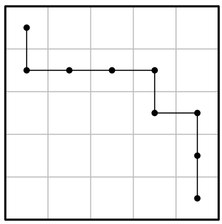
[1] Můžou se však dotýkat stranami.

Umění

1. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

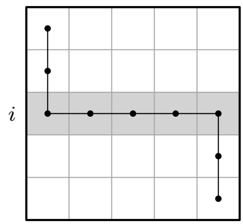
Pavel chce namalovat obraz do tabulky $n \times n$. Každý tah štětcem začíná v levém horním rohovém políčku a následně může pokračovat do dalších políček, štětec se přitom vždy musí posouvat z jednoho políčka do sousedního směrem doprava nebo dolů. Štětec zabarví každé políčko, přes které přejede. Kolik nejméně tahů štětcem musí Pavel provést, aby zabarvil celou tabulku?



(Josef Minařík)

Řešení:

Nejdůležitější pro vyřešení úlohy je uvědomit si, že v jednom tahu nelze obarvit více než jedno políčko vedlejší úhlopříčky, tedy úhlopříčky z levého dolního do pravého horního rohu. Úhlopříčka má n polí, budeme tedy potřebovat minimálně n tahů. Nyní nám stačí ukázat, že n tahy opravdu dokážeme celou tabulku obarvit.



Můžeme to udělat jako na obrázku, tedy v i-tém tahu nejprve táhnout svisle na i-tý řádek, pak dotáhnout vodorovně na konec řádku a zase táhnout svisle až do pravého dolního políčka.

Poznámky:

Velká část řešení obsahovala pouze konstrukci nejlepšího řešení bez zdůvodnění, proč je nejlepší, taková dostala 1 bod. Pokud vám chyběla konstrukce, dostali jste 2 body.

Některá řešení se pokoušela odůvodnit, proč jejich konstrukce je optimální. Většina takovýchto odůvodnění byla nedostatečná. Uspělo jen velmi málo řešitelů.

K úspěchu podobného postupu bylo třeba ukázat, že musí existovat tah, který povede až do pravého horního rohu a z něho může pouze svisle dolů. Zbyde nám tak neobarvený čtverec $(n-1) \times (n-1)$, o kterém platí, že zase musíme obarvit jeho pravý horní roh. Tak to opakujeme, až nám nic nezbyde.

Některá řešení se snažila ukázat, že každý tah obarvíme o dva čtverečky méně, tedy potřebujeme alespoň n tahů na obarvení všech políček tabulky. I jim většinou chybělo odůvodnění proč.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 2.

Verča si črtá do skicáře. Nejprve načrtla čtverec $ABCD$ s bodem E ležícím na jeho úhlopříčce AC tak, že $|AE| > |EC|$. Na jeho straně AB potom nakreslila bod F různý od B tak, aby platilo $|EF| = |DE|$. Dokažte, že $\sphericalangle DEF$ je pravý úhel. (Pavel Hudec)

Základní úhlící řešení:

Pokusíme se spočítat velikost úhlu $|\sphericalangle DEF|$ pomocí jiných úhlů.

Označme G kolmý průmět bodu E na úsečku AB. Nejprve si všimneme, že body B, D jsou osově souměrné podle úhlopříčky AC zadaného čtverce, tj. AC je osa úsečky BD, a proto platí $|BE| = |DE|$. Protože ale také $|DE| = |EF|$, má trojúhelník EFB dvě stejně dlouhé strany (EF, EB), jinými slovy je rovnoramenný. Z tohoto už přímo vyplývá $\sphericalangle FEG = \sphericalangle BEG$ (označme jejich velikost α).

Výška GE trojúhelníku EFB je kolmá na AB a zároveň je BC kolmá na AB, tedy $GE \parallel BC$. Protože jsou úhly $\sphericalangle BEG$ a $\sphericalangle CBE$ střídavé, je jejich velikost stejná, tj. $|\sphericalangle CBE| = \alpha$.

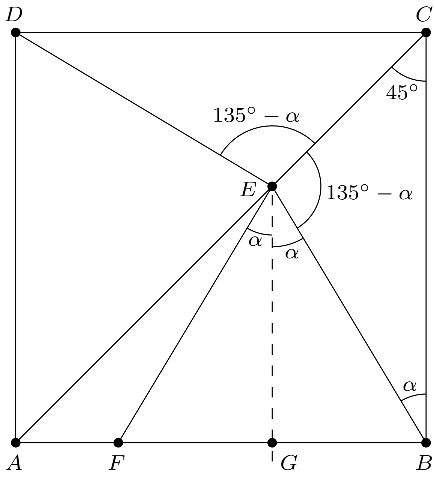
Ve čtverci svírá strana s úhlopříčkou úhel 45°, z čehož dopočteme velikost úhlu $|\sphericalangle CEB|$ jako

$$|\sphericalangle CEB| = 180^\circ - |\sphericalangle ECB| - |\sphericalangle CBE| = 135^\circ - \alpha.$$

Protože jsou B, D osově sdružené dle EC, platí shodnost trojúhelníků $\triangle DCE \cong \triangle BCE$. Ve shodných trojúhelnících mají sobě odpovídající úhly stejnou velikost, a proto platí $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle CED| = 135^\circ - \alpha$.

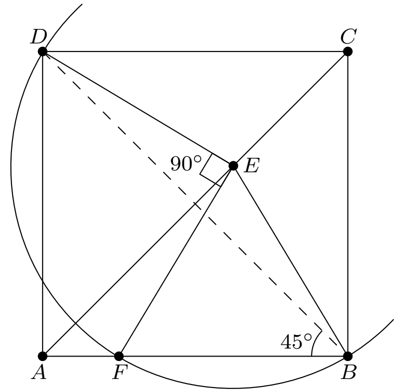
Pro úplnost jen doplníme, že velikost úhlu $|\sphericalangle FEB|$ je 2α. Pak můžeme dopočítat velikost úhlu $|\sphericalangle DEF|$ jako doplněk zbývajících úhlů okolo bodu E do 360°:

$$|\sphericalangle DEF| = 360^\circ - |\sphericalangle CED| - |\sphericalangle CEB| - |\sphericalangle FEB| = 360^\circ - 270^\circ + 2\alpha - 2\alpha = 90^\circ.$$



Alternativní úhlící řešení (podle Alice Dományové):
Využijeme poznatku z minulého řešení, že $|BE| = |DE| = |FE|$, z čehož plyne, že body B, D, F leží na kružnici se středem v E. Protože velikost úhlu $\sphericalangle DBF$ je 45° (je to úhel sevřený stranou a úhlopříčkou čtverce), z vlastností obvodových a středových úhlů můžeme říci

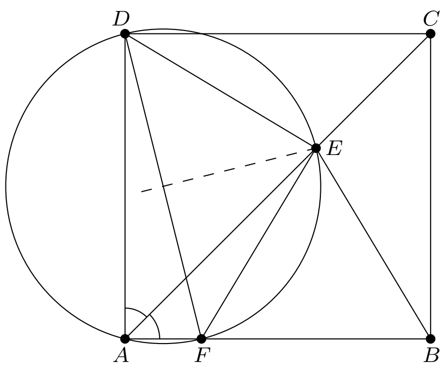
$$|\sphericalangle DEF| = 2 \cdot |\sphericalangle DBF| = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ.$$



Řešení přes Švrčkův bod[1]:
Protože platí $|DE| = |FE|$, leží E na ose úsečky DF. Ve čtverci je úhlopříčka zároveň osou příslušných vnitřních úhlů. E leží na AC, tedy na ose úhlu $\sphericalangle DAF$ $(= \sphericalangle DAB)$. Tudíž E je Švrčkův bod trojúhelníku ADF, jinými slovy body A, F, E, D tvoří tětivový čtyřúhelník. V takovém čtyřúhelníku platí, že součet protějších vnitřních úhlů je roven 180°, můžeme tedy velikost úhlu $\sphericalangle DEF$ vypočítat jako

$$|\sphericalangle DEF| = 180^\circ - |\sphericalangle DAF| = 90^\circ.$$

Tato argumentace je kompletní až na případ, kdy se dvě přímky neprotnou pouze v jednom bodě – tj. když jsou totožné. Snadno si rozmyslíme, že jediný takový případ může nastat, pokud by úsečka DF splynula s úhlopříčkou DB, ze zadání však $B \neq F$, tato možnost je tedy vyloučena. Proto mají zmiňované osa úhlu a osa úsečky vždy jeden průsečík.



[1] Pokud o Švrčkově bodě slyšíš poprvé, viz např. *https://prase.cz//library/SvrckuvBodVH/SvrckuvBodVH.pdf*.

Řešení pomocí skládání zobrazení:
Platí, že složením dvou osových souměrností[2] dle daných os vznikne rotace[3] se středem v průsečíku těchto os a úhlem rovným dvojnásobku úhlu jimi svíraného. Bod F získáme z bodu D tak, že nejprve zobrazíme $\mathcal{O}_{AC} : D \mapsto B$ a poté zobrazíme $\mathcal{O}_{EG} : B \mapsto F$. Všimněme si, že osy AC a EG se protínají v bodě E a svírají úhel 45°, protože EG je rovnoběžná s BC (což je strana čtverce, a proto svírá s úhlopříčkou úhel 45°). Z úvodního tvrzení tedy plyne $\mathcal{R}_{E,90^\circ} : D \mapsto F$, tudíž $|\sphericalangle DEF| = 90^\circ$.

Poznámky:
Většina správných řešení se do nějaké míry shodovala s prvním (tj. jednoduchým úhlícím), za krátká elegantní jsem udělil $+i$. Pokud řešení fungovalo, ale chyběl tam důležitý argument, nebo bylo zmatené, strhával jsem bod.

Naopak za řešení, které nefunguje, jsem uděloval 0 bodů, popř. 1 bod, pokud bylo vedeno správným směrem. Mnoho nefunkčních řešení se odvolávalo na „spirální podobnost“ nebo na posouvání bodů; taková řešení v drtivé většině nebyla dobře odargumentována a nešlo za ně udělit body. Obdobně nikam nevedlo dělení trojúhelníku DEF na menší podjednotky. *(Daniel Perout)*

Úloha 3.

Terka zakopla s plechovkou barvy, čímž do 2021 různých bodů na dosud čistém plátně dopadla kapka barvy. Mohlo se stát, že těžištěm každých 41 *kapek je opět nějaká kapka? Uvažujme, že kapky jsou body a mají všechny stejnou hmotnost.* (Josef Minařík)

Řešení:
Ukážeme, že navzájem různých těžišť existuje ostře více než kapek, takže některé z nich není kapkou. Seřaďme si kapky do posloupnosti $k_1, k_2, \ldots, k_{2021}$ dle rostoucí x-ové souřadnice. Pokud jsou si x-ové souřadnice dvou kapek rovny, pak kapka s větším indexem budiž ta s větší y-ovou souřadnicí.

V první konstrukci zafixujme kapky $k_1, k_2, \ldots, k_{40}$ a hledejme jejich společné těžiště s kapkou k_i, kde i půjde postupně od 41 do 2021. Pokud vyměňujeme body v pořadí setřídění, tak se s každou výměnou zvětší buď x-ová, nebo y-ová souřadnice těžiště. Snadno pak nahlédneme, že každá ze 41-tic má jiné těžiště. Tímto způsobem dostaneme 1981 různých těžišť.

V druhé konstrukci zafixujme kapky $k_1, k_2, \ldots, k_{39}$ a k_{2021} a obdobně hledejme jejich společné těžiště s kapkou k_i, kde i půjde postupně od 40 do 2020. Pokud $i = 40$, tak máme situaci stejnou jako v poslední instanci první konstrukce (tj. zafixovaných prvních 40 kapek a i bylo rovno 2021), tedy toto těžiště jsme už jednou započítali. Znovu s přibývajícím i se nám bude zvětšovat buď x-ová, nebo y-ová souřadnice společného těžiště. Vznikne tak dalších 1980 nových těžišť (poslední situace v předešlém odstavci a první v tomto odstavci se shodují).

Našli jsme celkem více různých těžišť, než je kapek, což vede ke sporu.

Poznámky:
Několik řešitelů si úlohu zredukovalo na případ, kdy body leží na přímce. Tento krok může být platný, ale je třeba dobře zdůvodnit, proč jej můžeme provést. Řešitelé, kteří takový krok dostatečně nezdůvodnili, dostali zpravidla nula bodů. Méně častou chybou bylo opomenutí toho, že těžiště 41-tice kapek může být v nějaké z těchto kapek, což obvykle vedlo na důkaz, který bohužel nefungoval. Někteří řešitelé si řazení zjednodušili projekcí na vhodnou přímku a díky tomu jim stačilo třídit pouze podle x-ové souřadnice. *(Honza Nekarda)*

[2] Osovou souměrnost, která zobrazí bod X do bodu Y podle osy PQ, budeme značit $\mathcal{O}_{PQ} : X \mapsto Y$.

[3] Rotaci se středem v P o úhel ω, která zobrazí bod X do bodu Y, budeme značit $\mathcal{R}_{P,\omega} : X \mapsto Y$.

Úloha 4.

Dominik rád kreslí kuželosečky. Zvolí reálná čísla a, b, pro něž parabola $y = x^2 + ax + b$ protíná osy x a y dohromady ve třech různých bodech. Poté nakreslí kružnici, na níž tyto tři body leží. Dokažte, že tato kružnice prochází pevným bodem nezávislým na a, b. *(Matěj Doležálek, Josef Minařík)*

Řešení:

Dosazením $x = 0$ dostáváme $y = b$, takže Dominikova parabola protne osu y v jediném bodě $[0, b]$. Zbylé dva průsečíky tak musí ležet na ose x, nechť jsou to body $[\alpha, 0]$, $[\beta, 0]$. Pak jsou α a β kořeny polynomu $x^2 + ax + b$. Z Viètových vztahů dále platí $b = \alpha\beta$.

Dominikova kružnice tedy prochází trojicí bodů

$$A = [\alpha, 0], \qquad B = [\beta, 0], \qquad C = [0, \alpha\beta].$$

Dokážeme, že tato kružnice prochází i bodem $D = [0, 1]$. Ten pak nezávisí na a, b a procházím jím tak všechny takovéto kružnice.

Tvrdíme, že středem kružnice je $S = \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha\beta+1}{2}\right]$. Díky své x-ové souřadnici leží na ose úsečky AB, zatímco díky své y-ové souřadnici leží na ose úsečky CD. Máme tedy $|SA| = |SB|$ a $|SC| = |SD|$, zbývá tak ukázat třeba $|SD| = |SA|$. K tomu spočteme

$$\begin{aligned}
|SA| &= \sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta + 1} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\
|SD| &= \sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 1} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1},
\end{aligned}$$

což dává $|SA| = |SD|$, jak jsme chtěli.

Řešení mocností:

Označme body A, B, C, D stejně jako v předchozím řešení. Uvážíme mocnost z počátku $O = [0, 0]$. Ten je průsečíkem přímek AB, CD a jeho (orientované) vzdálenosti od těchto bodů jsou

$$OA = \alpha, \qquad OB = \beta, \qquad OC = \alpha\beta, \qquad OD = 1.$$

To znamená, že $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, takže mocností bodu ke kružnici leží A, B, C, D na jedné kružnici, jak jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Většina došlých řešení úlohu správně vyřešila. Řešení, která správně uhodla, že hledaným bodem je $[0, 1]$, ale dál se nedostala, obdržela typicky 1 bod. Úspěšná řešení využívající mocnost podobně jako v druhém řešení si vysloužila $+i$. *(Matěj Doležálek)*

Úloha 5.

Martin vyplňuje nekonečný čtverečkovaný papír kladnými celými čísly. Chtěl by to provést tak, aby každý čtvereček s číslem k měl mezi svými osmi sousedy přesně k čtverečků, které jsou taktéž vyplněny číslem k. Kolik nejvýše různých čísel může Martin použít? *(Josef Minařík)*

Řešení:

Nejprve ukážeme, jaké nejlepší řešení jsme našli; potom dokážeme, že je naše řešení opravdu nejlepší.

Na obrázku je „dlaždice“, kterou můžeme vydláždit celou rovinu. U každého čtverečku si jednoduše ověříme, že splňuje zadání.

5	5	2	3	3	4	4	3
5	5	2	3	1	4	4	3
5	5	2	3	1	4	3	3
5	5	2	3	3	4	4	3
5	5	2	3	1	4	4	3
5	5	2	3	1	4	3	3
5	5	2	3	3	4	4	3
5	5	2	3	1	4	4	3
5	5	2	3	1	4	3	3

Toto řešení obsahuje čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Martin má k dispozici ještě čísla 6 a vyšší, ale každý čtvereček má jen 8 sousedů, takže Martin může použít už jen čísla 6, 7 a 8.

Kdyby do nějakého čtverečku napsal číslo 8, pak v každém sousedním čtverečku musí být číslo 8. Pak i v každém sousedním čtverečku těchto osmi čtverečků musí být osmičky. Můžeme si jednoduše domyslet, že osmičky pak zaplní celý papír. Takovéto řešení obsahuje jen jedno číslo, což je ostře méně než naše původní řešení s pěti čísly.

Kdyby do nějakého čtverečku napsal číslo 7 (v obrázcích níže v kroužku), sedm okolních čtverečků musí obsahovat sedmičku a jeden čtvereček bude obsahovat jiné číslo – to označme X. Protože ten čtvereček s X může sousedit s původní sedmičkou buď hranou, nebo rohem, nakreslíme si dva obrázky (nezáleží na tom, ze které strany X leží – tabulku si můžeme jednoduše otočit).

	7	7	7
7	7	7	7
7	7	X	7
7	7	7	7
	7	7	7

7	7	X
7	7	7
7	7	7

Na obrázku vlevo si sedmička v kroužku vynutila sedmičky v jejím okolí. Sedmičky v šedých čtverečcích si pak vynutily další sedmičky – už sousedí s políčkem X, které není sedmička, a potřebují sedm sedmičkových sousedů. Teď vidíme, že políčko X má jen sedmičkové sousedy. Samotné X ale sedmička není. Na X tedy nelze napsat žádné číslo (nemá ani jednoho souseda hodnoty X) a tato situace je proto neplatná.

Na obrázku vpravo si sedmička v kroužku opět vynutila okolní sedmičky. Sedmičky v šedých čtverečcích ale s X sousedí hranou, což převádí problém na obrázek vlevo. O tom už víme, že nesplňuje zadání, takže ani tento případ nemůže nastat.

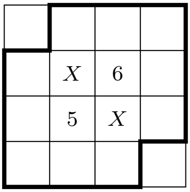
Ještě Martinovi zbývá šestka. Aktuálně už by naše původní řešení mohlo být horší jen v případě, že by Martin dokázal do tabulky napsat všechna čísla od 1 do 6. Tak se podívejme, jak by to vypadalo, kdyby do jedné tabulky chtěl napsat pětku i šestku zároveň.

Šestka musí mít kolem sebe šest políček s číslem 6. Tedy právě dva z jejích osmi sousedů nejsou šestky. Pětka musí kolem sebe mít pět políček s číslem 5, takže právě tři sousedi nejsou pětky.

Někam do tabulky napišme číslo 5. Naším cílem bude zvětšovat oblast, kde se nemůže nacházet šestka. Tuto oblast budeme nazývat *nešestková* a čtverečky této oblasti budeme označovat písmenem N.

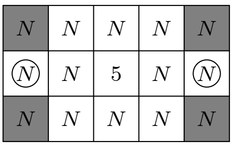
Uvažme, že by se šestka mohla nacházet ve čtverečku sousedícím hranou s čtverečkem s pětkou. Tyto dva čtverečky mají kromě sebe samotných celkem 10 dalších sousedů. Z toho musí být 6 šestek a 5 pětek. Na to bychom potřebovali 11 čtverečků, ale k dispozici jich máme jen 10. Proto nemůže šestka sousedit s pětkou hranou.

Uvažme, že by se šestka mohla nacházet ve čtverečku sousedícím rohem se čtverečkem s pětkou. Na obrázku níže jsou dva čtverečky označeny X – na těchto čtverečcích nemůže být ani 5 (sousedila by hranou se šestkou) ani 6 (sousedila by hranou s pětkou). Kolem šestky ale už zbývá jen pět čtverečků, kde by se mohla nacházet šestka. Takže i tato situace je neplatná, a tedy šestka nemůže s pětkou sousedit rohem.



Zatím máme nešestkovou oblast, kterou tvoří jedna pětka a všichni její sousedi. Jedná se o čtvercovou oblast se stranou délky tři. Čtverečky s kroužkem na obrázku níže mají tři sousedy, které nejsou šestka (označené N na bílém pozadí), takže samy nemůžou být šestky (šestky mají právě dva nešestkové sousedy) a označíme je proto N. Šedé čtverečky teď ale mají tři nešestkové sousedy, takže je také můžeme označit N. Tímto způsobem můžeme pokračovat vlevo i vpravo libovolně daleko.

S úplně stejným argumentem můžeme vytvořit nešestkový pás směrem nahoru nebo dolů od kteréhokoli již nešestkového čtverce se stranou délky tři (ty jsou obsaženy v pásu tloušťky tři).



Pokud by někde na papíře byla šestka, dokážeme vytvořit nešestkový pás směrem doleva nebo doprava, dokud nebudeme přesně „pod“ nebo „nad“ tou šestkou. A pak s tvořením nešestkového pásu pokračujeme k šestce – už zbývá jen jít „nahoru“ nebo „dolů“. V tento okamžik je jasné, že šestka tam být nemůže. Víme přece, že na její pozici je nešestková oblast.

Tedy na jednom papíře se pětka a šestka nemůžou vyskytovat zároveň. Takže Martin nemůže použít šest různých čísel zároveň. Na začátku jsme již ukázali, že pět různých čísel použít lze. Úloha je tedy hotova.

Alternativní řešení:

Budeme se zde zabývat pouze částí řešení, která ukazuje, že pětka a šestka nemůžou být na jednom papíře zároveň.

Pro spor předpokládejme, že tam je alespoň jedna pětka a alespoň jedna šestka. Přitom vyplnění papíru je korektní – splňuje zadání. My si vybereme takovou dvojici pětky a šestky, že jsou k sobě nejblíže (za vzdálenost dvou čtverečků považujeme součet počtu řádků a sloupců mezi nimi). Přitom nevadí, pokud bude víc takových dvojic – dokážeme vyřešit všechny situace. Že nemůžou sousedit rohem ani hranou jsme ukázali v minulém řešení.

Nejprve si ukážeme, jak to bude vypadat, kdyby nebyly ve stejném řádku ani ve stejném sloupci. Protože je situace symetrická pro jednotlivé směry, předpokládejme, že šestka je od pětky „doprava nahoru“. Protože naše šestka je k pětce nejblíže, určitě ve čtverečku o jedna dolů od této šestky nemůže být další šestka. A stejně tak pro čtvereček o jedna doleva. A dokonce ani ve čtverečku o jedna dolů a o jedna doleva; tam by byla vzdálenost dokonce o 2 menší. Takto jsme kolem naší šestky našli tři políčka, kde není šestka. Protože každá šestka má kolem sebe jen dvě nešestková pole, tato situace nemůže nastat.

Naše dvojice nejbližší pětky a šestky tedy leží na jednom řádku nebo v jednom sloupci. Je to ale symetrické, a proto uvážíme, že šestka je od pětky „napravo“. Určitě ve čtverečku hned nalevo od naší šestky nemůže být šestka – byla by k naší pětce blíže. My víme, že každá šestka má kolem sebe jen dva nešestkové sousedy. A proto v alespoň jednom čtverečku, který je o jedna doleva a o jedna nahoru nebo dolů od naší šestky, je šestka. Pro tuto šestku ale nastává situace jako v minulém odstavci. Tam jsme zjistili, že to nejde. A proto ani tato možnost nevyhovuje zadání.

Zjistili jsme, že neexistuje dvojice pětky a šestky, které by byly k sobě nejblíže. Proto neexistuje žádná dvojice pětky a šestky na jednom papíře.

Poznámky:
Většina řešení našla správnou konstrukci pro pokrytí papíru pomocí pěti různých čísel. Za to jsem dávala dva body. Větší problém ale byl důkaz, že víc různých čísel se Martinovi na papír napsat nepodaří. Plných pět bodů proto dostala pouze řešení, která byla opravdu kompletní.

(Klára „Klátra“ Pernicová)

Úloha 6.

Danil chce nakoupit n plechovek barvy o celkové hmotnosti 2^n-1 kilogramů. Pokud budou jednotlivé plechovky mít kladné reálné hmotnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kilogramů, zaplatí za ně v rámci slevové akce jen

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1+a_1}+\frac{a_3}{1+a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+\cdots+a_{n-1}}$$

korun. Kolik nejméně může zaplatit, pokud si rozdělení barvy mezi jednotlivé plechovky může zvolit libovolně? *(Josef Minařík)*

Řešení:
Dokážeme, že odpověď je n. Nejprve ukažme, že Danil nemůže zaplatit méně.

Všimněme si, že pro $k \leq n$ platí

$$\frac{a_k}{1+a_1+\cdots+a_{k-1}}+1=\frac{1+a_1+\cdots+a_{k-1}+a_k}{1+a_1+\cdots+a_{k-1}}.$$

Označme tento zlomek b_k. Čitatel b_k je stejný jako jmenovatel b_{k+1}, při násobení $b_k \cdot b_{k+1}$ se proto zkrátí. Nabízí se proto použít nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Ta nám dá

$$b_1+b_2+\cdots+b_n \geq n\cdot\sqrt[n]{b_1 b_2\cdots b_n}=$$

$$=n\cdot\sqrt[n]{\frac{1+a_1}{1}\cdot\frac{1+a_1+a_2}{1+a_1}\cdots\frac{1+a_1+\cdots+a_n}{1+a_1+\cdots+a_{n-1}}}=n\cdot\sqrt[n]{1+a_1+\cdots+a_n}.$$

Ze zadání víme, že $a_1+a_2+\cdots+a_n=2^n-1$, tedy

$$n\cdot\sqrt[n]{1+a_1+\cdots+a_n}=n\cdot\sqrt[n]{1+2^n-1}=n\cdot 2.$$

Platí $b_k = \frac{a_k}{1+a_1+\cdots+a_{k-1}} + 1$, takže

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} + n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq 2n,$$
$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq n.$$

Tímto jsme dokázali, že Danil zaplatí alespoň n. Zbývá najít taková $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pro která zaplatí přesně n. Nechť pro $1 \leq i \leq n$ platí $a_i = 2^{i-1}$. Potom platí

$$\frac{a_i}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}} = \frac{2^{i-1}}{1+1+2+\cdots+2^{i-2}} = \frac{2^{i-1}}{2^{i-1}} = 1.$$

Součet těchto zlomků pro i od 1 do n je tedy opravdu n. Zároveň

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

tudíž součet hmotností je opravdu správný, a toto rozložení vah je tak vyhovující.

POZNÁMKY:
Většina řešitelů přišla na to, jak mají být váhy rozložené a kolik Danil zaplatí. Dokázat, že méně zaplatit nemůže, už moc řešitelů nezvládlo. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha 7.

Archeolog Michal objevil jeskynní malbu pravěkých neandrtálců. Zobrazuje trojúhelník ABC, v němž je M střed strany AC a platí $|\sphericalangle CBM| = 2|\sphericalangle ABM|$. Dále je zobrazen vnitřní bod K úsečky BM splňující $|CM| = |CK|$. Dokažte, že $|MK| = |BC|$. *(Matěj Doležálek)*

ŘEŠENÍ:
Nechť $|\sphericalangle ABM| = \beta$, $|\sphericalangle CBM| = 2\beta$. Trojúhelník CMK je rovnoramenný se základnou MK, označme tedy $|\sphericalangle CMK| = |\sphericalangle CKM| = \varphi$.

Zobrazme si bod A v osové souměrnosti podle osy BM na bod A'. Pak jistě $|A'M| = |AM|$, a jelikož M je střed strany $|AC|$ a ze zadání platí $|MC| = |CK|$, máme rovnost

$$|A'M| = |AM| = |MC| = |CK|.$$

Nechť D je libovolný bod na polopřímce opačné k MB. Úhly $\sphericalangle AMD$ a $\sphericalangle BMC$ jsou vrcholové, tudíž se oba rovnají φ. Z osové souměrnosti rovněž platí, že

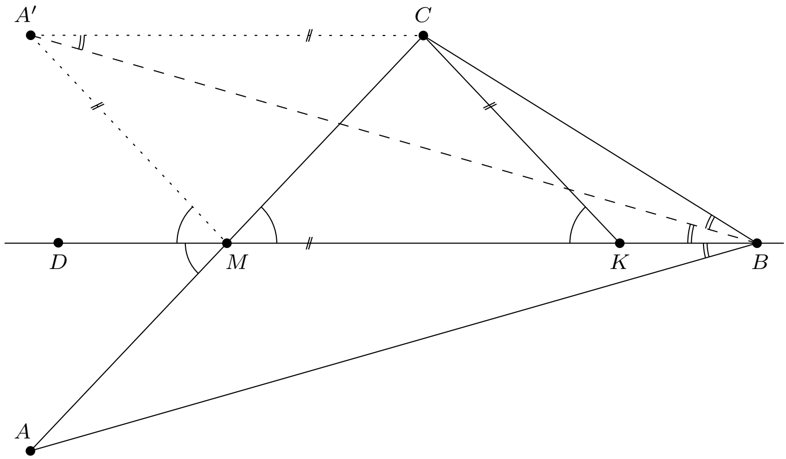
$$|\sphericalangle A'MD| = |\sphericalangle AMD| = \varphi = |\sphericalangle CKM|,$$

$\sphericalangle CKM$ a $\sphericalangle A'MD$ jsou tedy souhlasné a $A'M \parallel CK$. Jelikož jsou tyto úsečky i stejně dlouhé, jak již bylo zmíněno, je nutně $MKCA'$ rovnoběžník. Pak je i druhá dvojice stran rovnoběžná a $|MK| = |A'C|$. Pokud bychom nyní dokázali, že $|A'C| = |BC|$, neboli že trojúhelník $A'BC$ je rovnoramenný, získali bychom rovnost, již chceme dokázat.

Z rovnoběžnosti MB a $A'C$ plyne, že úhly $\sphericalangle MBA'$ a $\sphericalangle BA'C$ jsou střídavé, a tedy i stejně velké. Z osové souměrnosti AB a $A'B$ podle MB víme, že $|\sphericalangle MBA'| = |\sphericalangle ABM| = \beta$. Navíc

$$|\sphericalangle CBA'| = |\sphericalangle CBM| - |\sphericalangle MBA'| = 2\beta - \beta = \beta.$$

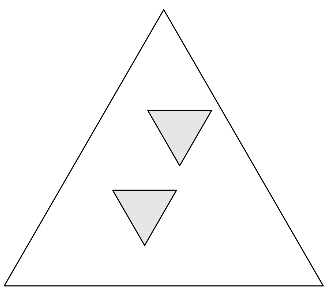
Vidíme tedy, že $|\sphericalangle BA'C| = |\sphericalangle MBA'| = \beta = |\sphericalangle CBA'|$ a trojúhelník $A'BC$ je opravdu rovnoramenný. Tudíž $|BC| = |A'C| = |MK|$ a důkaz je hotov.



Poznámky:
Našlo se několik řešení přenášejících nějaký bod podobně jako ve vzorovém řešení, případně doplňujících si nějaké pěkné body jako středy stran nebo body symetrické s bodem K. Někteří se rozhodli pro méně elegantní řešení, úlohu upočítali a téměř všichni se nakonec dopracovali k cíli. Za rozebrání triviálních případů, které by v obecné podobě nikam nevedlo, jsem bohužel nemohla udělit žádné body, většina řešitelů však dostala plný počet. *(Adéla Karolína Žáčková)*

Úloha 8.

Lenka tvoří moderní umění. Nejprve si načrtne rovnostranný trojúhelník Δ o straně délky $L > 0$ orientovaný špičkou nahoru. Dovnitř trojúhelníku Δ potom nakreslí n rovnostranných trojúhelníčků se stranami délky 1 orientovaných špičkou dolů, z nichž žádné dva se nepřekrývají[4]. Obrázek ukazuje příklad Lenčina výtvoru s $n = 2$.



Dokažte, že ať už bude Lenka kreslit jakkoliv, bude platit $n \leq \frac{2}{3}L^2$. *(Pavel Hudec)*

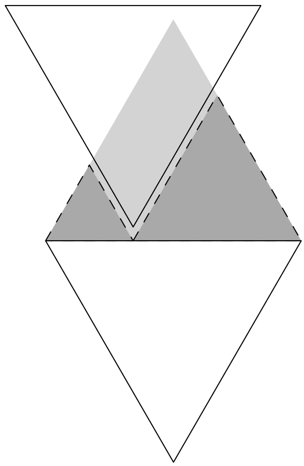
[4]Můžou se však dotýkat stranami.

Řešení:

K horní straně každého Lenčina trojúhelníčku špičkou dolů přilepme stejně velký šedý rovnostranný trojúhelník orientovaný špičkou nahoru. Všimněme si, že ten je vždy celý uvnitř velkého trojúhelníku.

Pokud se tento šedý trojúhelník překrývá s některým z Lenčiných trojúhelníčků, musí být horní vrchol šedého trojúhelníku vevnitř (nikoliv nutně na straně) Lenčina trojúhelníčku. Z toho je ale jasné, že se překrývá s nejvýše jedním Lenčiným trojúhelníčkem – pokud by byly alespoň dva, měly by společný vnitřní bod.

Ukažme, že alespoň polovina obsahu šedého trojúhelníku se s žádným Lenčiným trojúhelníkem nepřekrývá. Pokud se tento šedý trojúhelník nepřekrývá s žádným z Lenčiných trojúhelníčků, zjevně to platí. Nechť se tedy s nějakým překrývá.



Uvažme průmět spodního vrcholu příslušného Lenčina trojúhelníčku na spodní stranu tohoto šedého trojúhelníka. Nad úsečkami, které spojují tento průmět se spodními vrcholy šedého trojúhelníku, nakresleme čárkované rovnostranné trojúhelníky (uvnitř šedého). Je jasné, že ty se s Lenčiným trojúhelníčkem nepřekrývají (spodní vrchol druhého Lenčina trojúhelníčku jistě není pod spodní stranou šedého trojúhelníku, neboť by se překrývaly dva Lenčiny trojúhelníčky).

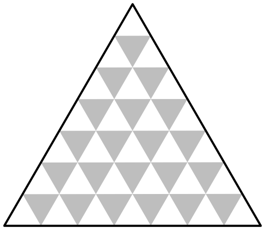
Označme délku jedné z těchto úseček a, druhá pak má délku $1-a$. Obsahy čárkovaných trojúhelníků tak jsou $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ a $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1-a)^2$. Jejich součet je $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(a^2 + (1-a)^2\right)$, což je z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem alespoň $\frac{\sqrt{3}}{8}$, tedy polovina obsahu šedého trojúhelníku.

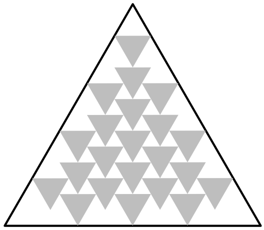
Dodejme ještě, že šedé trojúhelníky se nemohou navzájem překrývat, aniž by se překrývaly i Lenčiny trojúhelníčky.

Šedé trojúhelníky mají celkově stejný obsah jako Lenčiny trojúhelníčky. Alespoň polovina plochy pokryté šedými trojúhelníky však není pokryta Lenčinými trojúhelníčky. Tedy alespoň třetina plochy velkého trojúhelníka není pokryta Lenčinými trojúhelníčky. Z toho již plyne požadované $n \leq \frac{2}{3}L^2$.

Poznámky:

Většina řešitelů prostě našla nějaký způsob, jak mohla Lenka trojúhelníky nakreslit. Pak nakreslené trojúhelníky spočítala, řekla, že jich není dost, a z toho usuzovala platnost nerovnosti. Pak je ale potřeba ukázat, že použité rozmístění bylo opravdu nejlepší možné. A to je velmi obtížný úkol, kterému je téměř vždy lepší se vyhnout, tak jako to udělalo vzorové řešení. Navíc jedno hojně použité rozmístění ani nebylo optimální. Na obrázku níže vlevo vidíme jeho příklad pro $L = 7$ a $n = 21$, na obrázku vedle je ale s jiným rozmístěním dokonce $n = 22$.





(Václav Janáček)