Teorie nejen čísel 3

3. seriálová série | Termín odeslání: 12. dubna 2021

Úloha 1. (5 bodů)

Je dáno přirozené číslo n. Nechť je A množina těch čísel $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$, která splňují

$$a^2 \equiv a \pmod{n}.$$

Dokažte, že počet prvků A je mocnina dvojky.

Úloha 2. (5 bodů)

Nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ přirozených čísel nazvěme *krutopřísnou*, pokud je pro každé $n \in \mathbb{N}$ polynom

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ireducibilní nad $\mathbb{Z}$. Najděte krutopřísnou posloupnost, v níž se vyskytují jen dva navzájem různé prvky.

Úloha 3. (5 bodů)

Uvažujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, která splňují:

(i) Pro libovolný polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ platí $\varphi(f + 1) = \varphi(f) + 1$.
(ii) Pokud pro polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ platí $f \mid g$ a zároveň $\varphi(f) \neq 0$, pak už $\varphi(f) \mid \varphi(g)$.

Dokažte, že pro každé φ splňující tyto podmínky musí existovat celé číslo $z \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $f \in \mathbb{Z}[x]$ platí $\varphi(f) = f(z)$.