# Extrémy

3. podzimní série — Termín odeslání: 7. prosince 2020

Úloha 1. (3 body)
Martin chce být extrémně dobrý v kulečníku, ale trochu podvádí. Kulečníkový stůl má tvar obdélníku $2 \times 1$, na kterém se nachází šest kapes rozmístěných ve vrcholech obdélníku a ve středech jeho delších stran. Martin by dovnitř stolu chtěl umístit čtyři koule tak, aby pro každou kapsu některé dvě koule ležely s touto kapsou na přímce.[1] Kam má Martin položit svoje koule?

Úloha 2. (3 body)
Danil uspořádal turnaj v pojídání klobásek pro 55 soutěžících. Vždy když se dva z nich utkají, jeden z nich vyhraje, zatímco poražený vypadává a dál se turnaje neúčastní. Aby však soutěž byla férová, smí se dva soutěžící utkat pouze tehdy, pokud se počet výher, který má do té doby každý z nich na kontě, liší nanejvýš o jedna. I s tímto omezením se však Danilovi podařilo turnaj uspořádat tak, aby na konci měl jediného vítěze. Kolik nejvýše utkání mohl tento vítěz v průběhu turnaje vyhrát?

Úloha 3. (3 body)
Nalezněte největší přirozené číslo $n$, pro které je $n \cdot \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ celé číslo.[2]

Úloha 4. (5 bodů)
Na šachovnici $n \times n$ leží 111 mincí. Platí, že kdykoli se podíváme na sousední políčka, liší se počty mincí na těchto políčkách právě o 1. Určete největší $n$ takové, že lze takto mince na šachovnici umístit.

Úloha 5. (5 bodů)
Reálná čísla $x$, $y$ splňují $x^2y^2 + xy + 1 = 3y^2$. Najděte nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{y - x}{x + 4y}.$$

Úloha 6. (5 bodů)
V PraSestánu leží $2n + 1$ měst a mezi každými dvěma z nich vede silnice. Podél každé z těchto silnic (mimo samotná města) stojí 1, 2, nebo 3 benzinové pumpy. Pro libovolná tři města stojí podél tří silnic spojujících tato města dohromady alespoň 5 benzinek. V závislosti na $n$ určete nejmenší možný počet benzinových pump v PraSestánu.

Úloha 7. (5 bodů)
Najděte nejmenší přirozené $k > 1$ takové, že existují nenulová racionální čísla $x_1$ až $x_{2019}$, která nejsou všechna stejná a vyhovují cyklické soustavě rovnic

$$x_n + \frac{k}{x_{n+1}} = x_{n+1} + \frac{k}{x_{n+2}}$$

pro všechna $n \in \{1, \ldots, 2019\}$, kde ztotožňujeme $x_{2020} = x_1$ a $x_{2021} = x_2$.

---

[1] Koule i kapsy považujeme za body a koule nesmějí splývat ani ležet na stranách obdélníka.

[2] Výraz $k!$ ($k$ faktoriál) značí součin všech přirozených čísel od 1 do $k$ včetně.

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme trojúhelník $ABC$, na jehož stranách $AB$ a $AC$ jsou dány po řadě body $E$ a $F$. Na kružnici opsané $\triangle ABC$ leží bod $P$. Označme $O_1$, $O_2$ středy kružnic opsaných $\triangle PEB$ a $\triangle PFC$. Pro jakou pozici $P$ na kružnici opsané je vzdálenost $|O_1O_2|$ minimální?