Trojúhelníky

3. jarní série | Termín odeslání: 12. dubna 2021

Úloha 1. (3 body)

Najděte nedegenerovaný trojúhelník, který není pravoúhlý a lze rozdělit na 5 trojúhelníků, které mu jsou podobné.

Úloha 2. (3 body)

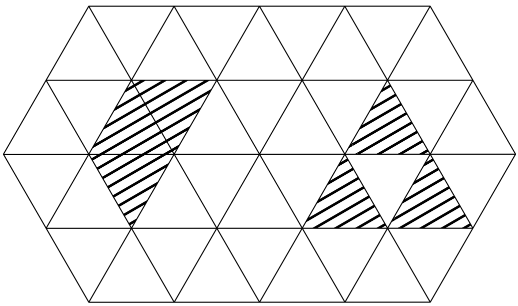
Lucka upekla dort ve tvaru pravidelného n-úhelníku, kde $n \geq 4$. Nejprve jej po obvodu potřela polevou a následně jej několika rovnými řezy rozřezala na trojúhelníkové dílky, jejichž všechny vrcholy jsou vrcholy původního n-úhelníku. Dokažte, že dílků, které mají dvě své strany potřené polevou, je právě o 2 více než dílků, které nemají polevou potřenou žádnou stranu.

Úloha 3. (3 body)

Lenka má nekonečný ubrus, na kterém je trojúhelníčková síť. Každý trojúhelníček je buďto červený, nebo modrý, přičemž obarvení splňuje následující podmínky:

(i) Tři trojúhelníčky, které dohromady tvoří lichoběžník (na obrázku vlevo), nikdy nejsou vybarveny stejnou barvou.

(ii) Tři trojúhelníčky, které jsou uspořádané do trojúhelníku (na obrázku vpravo), nikdy nejsou vybarveny stejnou barvou. Na barvě čtvrtého prostředního trojúhelníčku přitom nezáleží.



Matěj vystřihl z ubrusu šestiúhelník o straně 2 (stříhal jen po stranách trojúhelníčků). Dokažte, že na vystřiženém šestiúhelníku musí být stejný počet červených a modrých trojúhelníčků.

Úloha 4. (5 bodů)

V rovině leží trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC. Na stranách AB, AC jsou po řadě dány body K, L tak, že $|BK| = |BC| = |CL|$. Bod M je průsečík BL s CK a bod I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že $MI \perp BC$.

Úloha 5. (5 bodů)

Nechť je ABC rovnoramenný trojúhelník s $|AB| = |AC|$. Na polopřímce opačné k CB leží bod D a přímka AD protíná kružnici opsanou ABC podruhé v bodě K. Bod E je umístěn tak, aby $ACDE$ byl rovnoběžník. Kružnice, která se dotýká AB v bodě A a DE v bodě E, protíná přímku AD podruhé v bodě L. Dokažte, že $|AK| = |DL|$.

Úloha 6. (5 bodů)

V rovnoramenném trojúhelníku ABC platí $|AB| = |AC|$. Kružnice ω_1 se středem O_1 se dotýká AB v bodě B. Kružnice ω_2 se středem O_2 se dotýká AC v bodě C a kružnice ω_1 v bodě X. Přímka BC protne kružnice ω_1, ω_2 podruhé po řadě v bodech Y, Z. Označme O střed kružnice opsané XYZ. Přímka OO_1 protne AC v bodě G, analogicky OO_2 protne AB v bodě H. Dokažte, že A je střed kružnice opsané GHO.

Úloha 7. (5 bodů)

Je dán trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Osa úhlu $\sphericalangle BAC$ protne stranu BC v E a kružnici ω podruhé v D. Zvolme na BC bod F. Body M, N jsou umístěny po řadě na AB, AC tak, aby platilo $|AM| = |CF|$ a $|AN| = |BF|$. Přímky DE, DF protnou MN po řadě v G, H. Dokažte, že G, H, E, F leží na jedné kružnici.

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme kosočtverec $ABCD$ s kružnicí vepsanou ω a uvažujme na straně AB bod P. Tečna z bodu P ke kružnici ω různá od přímky AB protíná stranu AD v bodě Q. Dokažte, že obsah trojúhelníku CPQ nezávisí na poloze P.