Symetrie

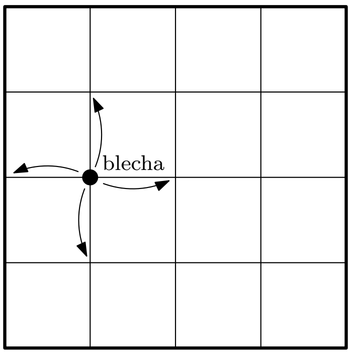
2. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. LISTOPADU 2020

ÚLOHA 1. (3 BODY)

V rovině leží po dvou různé body A, B, C a přímka p, která neprochází ani jedním z nich. V nějakém shodném zobrazení se A zobrazuje na A, B na B a p na p. Rozhodněte, zdali se v každé takové konfiguraci musí C zobrazovat na C.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Blecha Terka skáče po mřížce 5×5 a začíná tak, jak je zobrazeno na následujícím obrázku.



V každém kroku se náhodně rozhodne, jestli skočí do sousedního bodu směrem vlevo, vpravo, nahoru, nebo dolů (všechny směry jsou stejně pravděpodobné). Zastaví se ve chvíli, kdy skočí na obvod mřížky. Víme, že se Terka skutečně někdy zastavila. S jakou pravděpodobností skončila na jedné ze svislých hran obvodu?

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Označme vrcholy pravidelného 2020-úhelníku A_1 až A_{2020}. Dokažte, že

$$|A_1A_2|^2 + |A_1A_4|^2 + \cdots + |A_1A_{2020}|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_1A_5|^2 + \cdots + |A_1A_{2019}|^2.$$

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Nenulová reálná čísla a, b, c splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2, \\ b^2 + b &= c^2, \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

Dokažte, že $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

Úloha 5. (5 bodů)

V trojúhelníku ABC platí $|AB| < |AC|$. Osa strany BC protíná stranu AC v bodě X. Na straně AB leží bod Y tak, že průsečík Z přímek BX a CY splňuje $|ZC| = |AB|$. Dokažte, že body A, X, Y, Z leží na jedné kružnici.

Úloha 6. (5 bodů)

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Na základně BC zvolme libovolný bod X. Dále nechť Y, Z jsou body po řadě na stranách AB, AC splňující $|\sphericalangle BXY| = |\sphericalangle CXZ|$. Rovnoběžka s YZ procházející bodem B protne úsečku XZ v bodě T. Ukažte, že trojúhelník ABC je osově souměrný podle přímky AT.

Úloha 7. (5 bodů)

Ve městě stojí 2020^2 domů uspořádaných do čtverce 2020×2020. Z každého domu vede elektrické vedení do všech sousedních domů, přičemž domy považujeme za sousední, pokud jejich parcely mají společnou hranu. Jednoho dne se ale městem prohnala veliká bouře a některé dráty poničila. Elektrikář Rado se lopotil celou noc, aby opravil dost drátů na to, aby libovolné dva domy ve městě byly spojeny elektrickým vedením. Teď mu ale volá starosta Radeček a požaduje důkaz, že jsou skutečně každé dva domy propojené. Rado umí z velína ukázat na dvojici domů ve městě, načež obdrží potvrzení, že dané dva domy skutečně propojené jsou. Určete, kolik nejméně dvojic domů musí Rado ověřit, aby mohl Radečkovi dokázat, že jsou propojeny každé dva domy ve městě.

Úloha 8. (5 bodů)

Pavel a Matěj hrají hru s $n \geq 3$ letišti, mezi kterými na začátku nejsou žádné letecké linky. Matěj začíná a hráči se střídají v tazích. Hráč na tahu vždy propojí libovolná, zatím nespojená, letiště přímou obousměrnou leteckou linkou. Ani jeden z nich nechce být ten, kdo jako první vytvoří cyklus liché délky.[1] Zjistěte, pro která n může Matěj zajistit, že první lichý cyklus vytvoří Pavel, ať už Pavel hraje jakkoli.

[1] Existence cyklu liché délky znamená, že můžeme začít v nějakém letišti a pomocí lichého počtu letů se do něj dostat zpátky.