

Rozdíly a podíly

2. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. BŘEZNA 2021

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Pro reálná čísla a, b, c platí, že $a + b, a + c$ i $b + c$ jsou (v tomto pořadí) po sobě jdoucí celá čísla a navíc je $a + b$ liché. Dokažte, že a, b, c jsou po sobě jdoucí celá čísla.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
U kulatého stolu sedí Radeček a 2021 šimpanzů.¹ Každý šimpanz vlastní nenulový počet banánů, přičemž žádní dva šimpanzi jich nemají stejně mnoho, zatímco Radeček nemá žádné banány. Rozdíl počtů banánů mezi libovolnými dvěma sousedy u stolu je vždy buďto 2, nebo 3. Určete, kolik nejvíce banánů může nějaký šimpanz vlastnit.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Matěj a Pavel se ocitli na planetě tvaru pravidelného čtyřstěnu. Matěj si postavil stan v jednom z vrcholů, zatímco Pavel se utábořil ve středu protilehlé stěny. Oba se mohou pohybovat pouze po povrchu planety. Označme M plochu té části povrchu, kam to má Matěj od svého stanu blíže než Pavel od toho svého. Analogicky označme P plochu té části, kam to má blíže Pavel. Určete hodnotu podílu $\frac{M}{P}$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Mějme prvočíslo ve tvaru $p = 2^{2^n} + 1$ pro nějaké přirozené n . Dokažte, že p se nedá zapsat jako rozdíl dvou pátých mocnin přirozených čísel.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Na stole leží kartičky s čísly $1, 2, 3, \dots, a + b$ pro nějaká přirozená a, b . Nejprve přijde Hedvika a některé karty ze stolu sebere, avšak ponechá ostře více než polovinu karet. Ukažte, že Lucka poté dovede ze zbylých karet na stole vybrat dvě, jejichž rozdíl je a nebo b .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Michal má rostoucí k -prvkovou posloupnost prvočísel p_1, p_2, \dots, p_k . Všiml si, že jisté přirozené číslo d splňuje $p_{i+1} - p_i = d$ pro každé $i \in \{1, \dots, k-1\}$ a že navíc $d < k$. Najděte všechny posloupnosti, které může Michal mít.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Okolo kruhu je rozmístěno 2^n nezáporných celých čísel. V jednom kroku připišeme mezi každou dvojici sousedních čísel absolutní hodnotu jejich rozdílu a smažeme původní čísla, máme tedy znovu 2^n čísel. Dokažte, že po konečném počtu kroků dostaneme samé nuly.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Najděte všechny dvojice prvočísel p, q , pro něž jsou oba podíly

$$\frac{(2p^2 - 1)^p + 1}{p + q}, \quad \frac{(2q^2 - 1)^q + 1}{p + q}$$

celá čísla.

¹Radeček není šimpanz.