Hádanky

1. jarní série — Termín odeslání: 8. února 2021

Úloha 1. (3 body)

V kroužku sedí 2021 orgů. Každý buďto vždy říká pravdu, nebo vždy lže. Postupně všichni prohlásí: „Org o dvě místa nalevo ode mne říká vždy pravdu.“ Může se stát, aby alespoň jeden org mluvil pravdu a zároveň alespoň jeden lhal?

Úloha 2. (3 body)

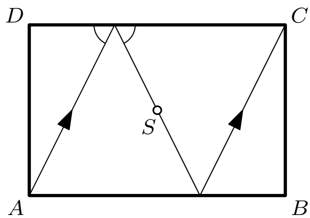
V řadě stojí 200 mudrců. Každý z nich buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lže. Pro lichá n v pořadí n-tý mudrc prohlásil: „Právě n z nás mluví pravdu.“ Pro sudá n naopak n-tý mudrc prohlásil, že je v řadě právě n lhářů. Kolik může být mezi mudrci lhářů?

Úloha 3. (3 body)

Je dán čtverec 10×10. Je možné jej vyplnit pravoúhlými trojúhelníky s délkami stran 3, 4, 5 a čtverečky 1×1 tak, aby se žádné dva útvary nepřekrývaly a aby se žádné dva čtverečky ani nedotýkaly[1]?

Úloha 4. (5 bodů)

Strany obdélníku $ABCD$ jsou tvořeny zrcadly. Pepa z vrcholu A vystřelil laserový paprsek směrem dovnitř obdélníku. Paprsek se několikrát odrazil[2] od zrcadel, až doputoval do vrcholu C. Musel paprsek projít středem S úsečky AC?



Úloha 5. (5 bodů)

Třída o 2021 žácích si posedala do kruhu. Všichni kluci a právě tři holky vždy lžou, zatímco zbylé holky vždy mluví pravdu. Každý člen třídy prohlásil, že osoba po jeho levici a osoba po jeho pravici jsou různých pohlaví. Kolik může být ve třídě holek?

Úloha 6. (5 bodů)

Pro která přirozená n lze čísla $1, 2, 3, \ldots, 2n$ rozdělit do n dvojiček tak, že pro každou dvojičku $\{a, b\}$ je $ab + 1$ druhá mocnina nějakého přirozeného čísla?

---

[1] Čtverečky se dotýkají, pokud jejich hranice sdílí libovolný bod.

[2] Úhel dopadu paprsku je vždy stejný jako úhel odrazu.

Úloha 7. (5 bodů)

Radek má šachovnici 8×8 a na k políček umístí pěšce. Pavel ale nemá pěšce rád, proto si postupně vybere 4 sloupce a 4 řádky a odstraní z nich všechny pěšce. Pro jaké nejmenší k mohl Radek rozmístit pěšce tak, aby mu na konci nehledě na Pavlův výběr aspoň jeden zbyl?

Úloha 8. (5 bodů)

Řekněme, že přirozené číslo a je *záhadné*, pokud existují nesoudělná přirozená čísla x, y splňující $a = x^2 + y^2$. Nechť je $a_1, a_2, \ldots$ nekonečná rostoucí posloupnost tvořená všemi záhadnými čísly. Je pro nějaké n všech 2021 čísel $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+2020}$ lichých?