Finální myš-maš

4. jarní série Termín odeslání: 10. května 2021

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

(a) V obdélníku $ABCD$ leží E na straně BC a F na straně CD tak, že AEF je rovnostranný trojúhelník. Nechť je M střed úsečky AF. Dokažte, že trojúhelník BCM je rovnostranný.
(2 body)

(b) V obdélníku $ABCD$ leží E na straně BC a F na straně CD tak, že $|BE| = |DF|$ a $|\sphericalangle EAF| = 45°$. Dokažte, že obsah trojúhelníku AEF je roven součtu obsahů trojúhelníků ABE a ADF. (3 body)

Úloha 2.

(a) V čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC, BD kolmé a protínají se v bodě O. Součet poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům AOB a COD je stejný jako součet poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům BOC a DOA. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je symetrický podle jedné ze svých úhlopříček. (2 body)

(b) Je dáno prvočíslo $p > 3$. Nechť K značí počet takových permutací $(a_1, \ldots, a_p)$ množiny $\{1, \ldots, p\}$, že číslo

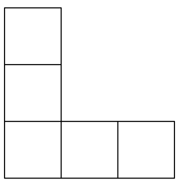
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

je násobkem p. Dokažte, že $K + p$ je násobkem p^2. (3 body)

Úloha 3.

(a) Do políček tabulky $n \times n$ jsou vepsána čísla 1 až n^2 (každé právě jednou). Dokažte, že rozdíl čísel v některých dvou políčkách, která spolu sousedí stranou nebo vrcholem, je alespoň $n + 1$.
(2 body)

(b) Mějme kostičku ve tvaru rovnoramenného L složeného z pěti čtverečků (jako na obrázku), kterou lze otáčet. Kolik nejméně takových kostiček musíme položit na šachovnici 10×10, aby se už nedala přiložit žádná další?



(3 body)

Úloha 4.

(a) Ve čtverci $ABCD$ s délkou strany 2 leží na stranách AB a CD po řadě body E a F. Označme X průsečík přímek AF a DE a Y průsečík přímek BF a CE. Dokažte, že délka úsečky XY je vždy alespoň 1, ať už jsou body E, F zvolené jakkoli. (2 body)

(b) Řekneme, že konečná množina bodů v rovině je *pospolitá*, pokud pro každé tři její body existuje jednotkový kruh, který tyto body obsahuje. Dokažte, že každou pospolitou množinu lze pokrýt jednotkovým kruhem. (3 body)

Úloha 5.

(a) Sedm orgů se střídá v hlídání trezoru se vzorovým řešením myš-maše. Každý org má sedmihodinovou směnu, která začíná každý den ve stejnou dobu v celou hodinu a během níž trezor hlídá. Směny jsou rozvrženy tak, aby trezor v každém okamžiku hlídal aspoň jeden org. Rozhodněte, zda v každém takovém rozvržení směn existuje org, kterého můžeme propustit a přitom zachovat, že i potom bude trezor hlídán 24 hodin denně. (2 body)

(b) Máme n červených a n modrých karet, na každé z nichž je nějaké číslo od 1 do n (čísla se mohou opakovat). Je vždy možné vybrat několik modrých a několik červených karet tak, aby měly modrá a červená skupinka stejný součet? (3 body)

Úloha 6.

(a) Čísla 1 až 26 rozdělíme do dvojic (a, b), z nichž následně vyrobíme zlomky $\frac{a}{b}$. Určete, kolik nejvíce z těchto zlomků může být celočíselných. (2 body)

(b) Řekněme, že dvě přirozená čísla jsou si *blízká*, je-li jejich největší společný dělitel roven jejich rozdílu. Určete, pro která n lze zvolit n čísel takových, že každá dvě z nich jsou si blízká.

(3 body)

Úloha 7.

(a) V čtyřúhelníku $ABCD$ je M střed AB a N střed CD. Úsečky AN, DM se protínají v K, zatímco BN, CM se protínají v L. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků AMK a CNL je stejný jako součet obsahů BML a DNK. (2 body)

(b) Kružnice α, β se protínají v bodech X a Y. Kružnice γ se dotýká kružnice α v bodě A a kružnice β v bodě B. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle XAY$ a $\sphericalangle XBY$ se protínají na úsečce XY.

(3 body)

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *V obdélníku $ABCD$ leží E na straně BC a F na straně CD tak, že AEF je rovnostranný trojúhelník. Nechť je M střed úsečky AF. Dokažte, že trojúhelník BCM je rovnostranný.*

(Pavel Hudec)

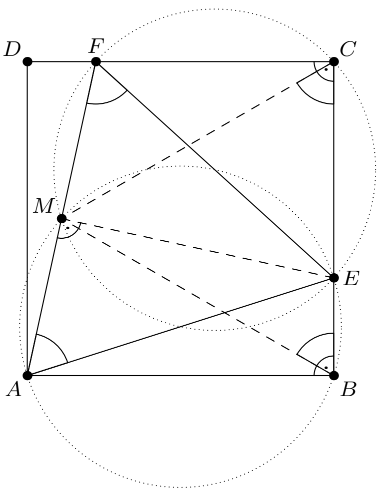
(b) *V obdélníku $ABCD$ leží E na straně BC a F na straně CD tak, že $|BE| = |DF|$ a $|\sphericalangle EAF| = 45^\circ$. Dokažte, že obsah trojúhelníku AEF je roven součtu obsahů trojúhelníků ABE a ADF.* *(Pavel Hudec)*

ŘEŠENÍ:

(a) Úsečka EM je těžnicí v rovnostranném trojúhelníku AEF, takže je zároveň i jeho výškou. Tím pádem platí $|\sphericalangle FME| = |\sphericalangle FCE| = 90^\circ$, a tedy body C a M leží na Thaletově kružnici nad průměrem EF. Analogicky i body A, M, E a B leží na jedné kružnici. Z věty o obvodovém úhlu pak dostaneme

$$|\sphericalangle MBE| = |\sphericalangle MAE| = 60^\circ = |\sphericalangle MFE| = |\sphericalangle MCE|,$$

tedy dva úhly trojúhelníku BCM mají velikost 60°, což už znamená, že BCM je rovnostranný.



(b)

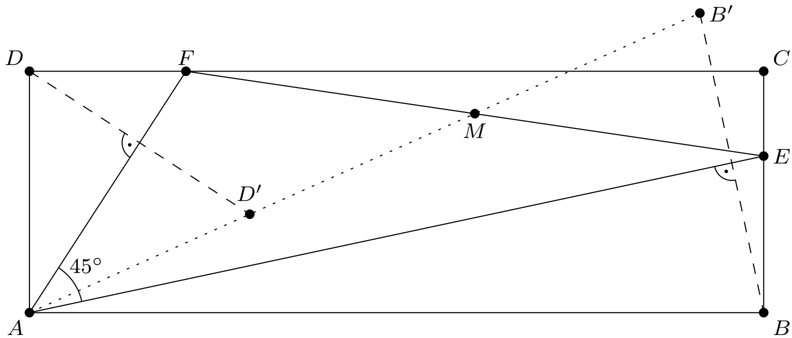
Řešení přes osovou souměrnost:
Označme po řadě B' a D' obrazy bodů B a D v osové souměrnosti podle úseček AE a AF. Pak body A, B' a D' leží na jedné přímce, neboť

$$|\sphericalangle DAD'| + |\sphericalangle BAB'| = 2 \cdot |\sphericalangle DAF| + 2 \cdot |\sphericalangle BAE| = 2 \cdot (90^\circ - |\sphericalangle EAF|) = 90^\circ.$$

Zřejmě platí, že $|D'F| = |DF| = |BE| = |B'E|$. Dále z osových souměrností dostáváme

$$|\sphericalangle FD'A| = |\sphericalangle FDA| = 90^\circ = |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle AB'E|,$$

což díky kolinearitě A, D' a B značí, že úsečky FD' a $B'E$ jsou rovnoběžné. Proto je čtyřúhelník $FD'EB'$ rovnoběžník (může být i degenerovaný).



Nechť M je střed jeho úhlopříčky EF. Pak je M středem i jeho druhé úhlopříčky $B'D'$, tedy body A, B', D' a M leží na přímce.

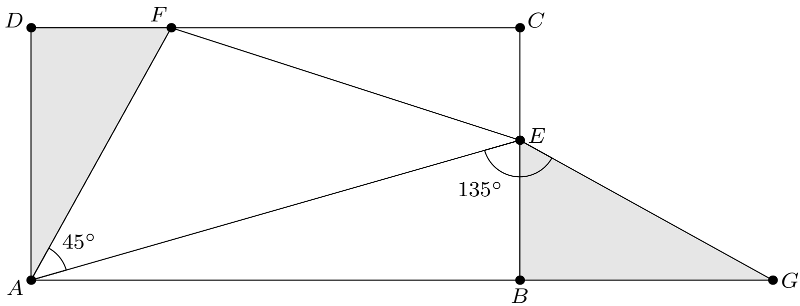
Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že B' neleží blíže k A než D'. Trojúhelníky $FD'M$ a $EB'M$ jsou shodné, takže pro hledané obsahy platí

$$S_{AEF} = S_{AB'E} + S_{AD'F} = S_{ABE} + S_{ADF},$$

jak jsme měli ukázat.

Řešení přes shodné trojúhelníky:
Jelikož ze zadání platí $|BE| = |DF|$, existuje na polopřímce opačné k BA bod G takový, že trojúhelníky ADF a GBE jsou shodné. Pak spočítáme

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AEG| &= 180^\circ - |\sphericalangle EGA| - |\sphericalangle GAE| \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle DAF| - |\sphericalangle BAE| \\ &= 180^\circ - (90^\circ - |\sphericalangle EAF|) \\ &= 135^\circ. \end{aligned}$$



Ze vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ dostáváme rovnost obsahů

$$S_{AEG} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |EG| \cdot \sin(|\sphericalangle AEG|) = \frac{1}{2}|AE| \cdot |AF| \cdot \sin(|\sphericalangle EAF|) = S_{AEF},$$

protože $\sin(|\sphericalangle AEG|) = \sin(|\sphericalangle EAF|) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a AF s EG si odpovídají ve shodných trojúhelnících.

Shodné trojúhelníky mají shodné obsahy, takže platí

$$S_{AEF} = S_{AEG} = S_{ABE} + S_{EBG} = S_{ABE} + S_{ADF}.$$

Poznámky:

V části **(a)** se nevyskytly žádné problémy, většina správných řešení byla velmi podobná vzorovému. V části **(b)** se vyskytlo několik různých přístupů. Řešením přes shodné trojúhelníky nebo přes rotaci jsem uděloval imaginární bod. Několik řešitelů pak úspěšně poslalo stravitelné goniometrické či analytické řešení, za což je také chválím. *(Pavel Hudec)*

Úloha 2.

(a) *V čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC, BD kolmé a protínají se v bodě O. Součet poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům AOB a COD je stejný jako součet poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům BOC a DOA. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je symetrický podle jedné ze svých úhlopříček.* *(Matěj Doležálek)*

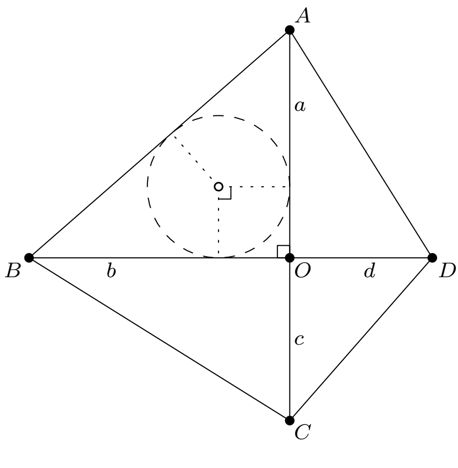
(b) *Je dáno prvočíslo $p > 3$. Nechť K značí počet takových permutací $(a_1, \ldots, a_p)$ množiny $\{1, \ldots, p\}$, že číslo*

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

je násobkem p. Dokažte, že $K + p$ je násobkem p^2. *(Pavel Hudec)*

Řešení:

(a) Označme si délky $|AO| = a$, $|BO| = b$, $|CO| = c$ a $|DO| = d$. Vzhledem ke kolmosti úhlopříček je čtyřúhelník symetrický podle AC, právě když platí $b = d$, a podle BD, právě když platí $a = c$, takže nám stačí ukázat, že nastane alespoň jedna z těchto rovností.



Trojúhelník AOB je pravoúhlý, takže poloměr jeho vepsané kružnice můžeme vyjádřit jako $r_1 = \frac{1}{2}(|AO| + |BO| - |AB|)$. Dosadíme-li všechna taková vyjádření do zadané podmínky, tak po vykrácení součtu $\frac{1}{2}(a + b + c + d)$ dostáváme její ekvivalentní tvar

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

Zároveň však můžeme všechny tyto délky vyjádřit z Pythagorovy věty, jako například $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$, čímž dostaneme novou rovnost

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+d^2}.$$

Ekvivalentními úpravami (poněvadž pracujeme s kladnými čísly, je i umocnění na druhou ekvivalentní úpravou) můžeme podmínku dále převést na

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} &= a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+c^2)}, \\ a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 &= a^2b^2+a^2c^2+b^2d^2+c^2d^2, \\ a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2-c^2d^2 &= 0, \\ \left(a^2-c^2\right)\left(d^2-b^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož jsou čísla a, b, c, d kladná, tak z této podmínky už nutně plyne, že musí platit alespoň jedna z rovností $a = c$, $b = d$, jak jsme chtěli dokázat.

(b) V úloze budeme téměř vždy počítat modulo p, včetně indexů (takže například $a_{p+1} = a_1$, $a_p = a_0$, ...). Zvolme si nějakou permutaci $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, pro přirozená $0 \le i, j \le p-1$ potom můžeme definovat novou permutaci

$$\pi_{i,j} = (a_{i+1}+j, a_{i+2}+j, \ldots, a_{i+p-1}+j, a_{i+p}+j),$$

kde sčítání vždycky bereme modulo p. Je jasné, že čísla $a_{i+1}+j, \ldots, a_i+j$ pořád pokrývají všechny zbytkové třídy, takže se stále jedná o permutaci. Teď ukážeme, že splňuje-li permutace π zadanou podmínku, tak ji splňují i všechny takto odvozené permutace $\pi_{i,j}$: Zkoumaný součet je cyklický, tudíž ho nezmění posunutí indexů o i. Dále platí $a_1 + \cdots + a_p = 1 + 2 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$, což je dělitelné p, takže dohromady máme

$$\sum_{k=1}^{p} (a_{k+i}+j)(a_{k+i+1}+j) \equiv \sum_{k=1}^{p} a_k a_{k+1} + 2j \sum_{k=1}^{p} a_k + j^2 p \equiv \sum_{k=1}^{p} a_k a_{k+1} \pmod p$$

neboli permutace $\pi_{i,j}$ vyhovuje právě tehdy, kdy vyhovuje π. Pro každou permutaci můžeme tedy definovat množinu $S_\pi = \{\pi_{i,j} : 0 \le i, j \le p-1\}$, snadno nahlédneme, že pokud $\sigma \in S_\pi$ a $\sigma = \pi_{i,j}$, tak $\pi = \sigma_{p-i,p-j}$ a $\pi \in S_\sigma$. Díky $(\pi_{i,j})_{i',j'} = \pi_{i+i',j+j'}$ v tomto případě dokonce platí $S_\pi = S_\sigma$, takže jsme popsali rozdělení vyhovujících permutací na disjunktní množiny S_π.

Zároveň platí, že pro skoro všechny permutace π jsou všechny $\pi_{i,j}$ různé (což znamená $|S_\pi| = p^2$): existují-li dvojice s $(i,j) \ne (i',j')$ a zároveň $\pi_{i,j} = \pi_{i',j'}$, tak musí pro všechna k platit vztah $a_{k+i} + j \equiv a_{k+i'} + j' \pmod p$, neboli $a_{k+i-i'} \equiv a_k + j - j' \pmod p$. Pokud $i \equiv i'$, tak nutně i $j \equiv j'$, tudíž $i - i' \not\equiv 0 \pmod p$ a existuje nějaké ℓ takové, že $\ell(i-i') \equiv 1 \pmod p$. Potom můžeme indukcí z našeho vztahu ukázat, že pro všechna k platí

$$a_{k+1} \equiv a_{k+\ell(i-i')} \equiv a_{k+(\ell-1)(i-i')} + j - j' \equiv \cdots \equiv a_k + \ell(j-j') \pmod p.$$

Takže se musí rovnat všechny diference v naší posloupnosti neboli $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ musí být nekonstantní aritmetická posloupnost $(a, a+d, \ldots, a+(p-1)d)$ pro nějaká $0 \le a < p$, $0 < d < p$. Ještě můžeme díky podmínce $p > 3$ (tj. lze dělit dvojkou a trojkou modulo p) a známému vzorci $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ pro sčítání kombinačních čísel ověřit, že všechny nekonstantní aritmetické posloupnosti skutečně splňují podmínku ze zadání:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} (a+(k-1)d)(a+kd) &\equiv pa^2 + da\left(\sum_{k=1}^{p} k + \sum_{k=1}^{p} (k-1)\right) + d^2 \sum_{k=1}^{p} k(k-1) \equiv 2d^2 \sum_{k=1}^{p} \binom{k}{2} \\ &\equiv 2d^2 \cdot \binom{p+1}{3} \equiv 2d^2 \cdot \frac{p(p^2-1)}{6} \equiv 0 \pmod p. \end{aligned}$$

Jelikož je nekonstantních aritmetických posloupností dohromady $p(p-1)$, tak celkový počet vyhovujících permutací tedy můžeme vyjádřit jako $K = p(p-1)+K'$, kde K' je počet vyhovujících permutací, které nejsou aritmetické posloupnosti. V první části řešení jsme si ovšem ukázali, jak lze tyto permutace rozdělit do skupinek po p^2 prvcích, takže platí $p^2 \mid K'$, tedy i $p^2 \mid K'+p^2 = K+p$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

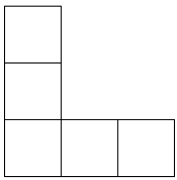
S první úlohou si většina řešení poradila dost dobře. Akorát se občas po převedení podmínky na tvar $|AB|+|CD| = |BC|+|AD|$, objevovaly velmi vágní úvahy o tom, jak se strany čtyřúhelníka prodlouží, pokud se budou měnit délky a, b, c, d. Technicky náročnou druhou úlohu se bohužel nikomu nepovedlo dořešit, ačkoliv řada řešitelů přišla s dobrými nápady (zkoumání aritmetických posloupností, posunutí indexů, resp. samotných čísel v permutaci o konstantu), za což byli oceněni jedním bodem. *(Danil Koževnikov)*

Úloha 3.

(a) *Do políček tabulky $n \times n$ jsou vepsána čísla 1 až n^2 (každé právě jednou). Dokažte, že rozdíl čísel v některých dvou políčkách, která spolu sousedí stranou nebo vrcholem, je alespoň $n+1$.*

(Josef Minařík)

(b) *Mějme kostičku ve tvaru rovnoramenného L složeného z pěti čtverečků (jako na obrázku), kterou lze otáčet. Kolik nejméně takových kostiček musíme položit na šachovnici 10×10, aby se už nedala přiložit žádná další?*



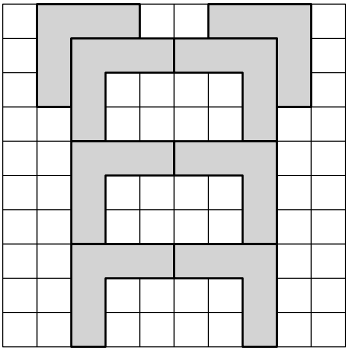
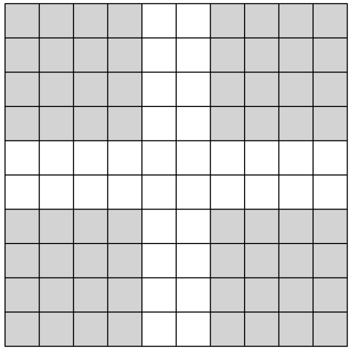
(Josef Minařík)

Řešení:

(a) Pro začátek poznamenejme, že v zadání chybí podmínka $n > 1$, pro $n = 1$ totiž úloha nedává smysl. Dále tedy předpokládejme $n > 1$.

Uvažujme políčka, na kterých je 1 a n^2, a nejkratší cestu mezi nimi. Cestou rozumíme posloupnost políček, která spolu sousedí stranou nebo vrcholem. Délka takové cesty (včetně krajních políček s 1 a n^2) bude nejvýše n. Předpokládejme, že mezi každou dvojicí sousedících políček na této cestě je rozdíl nejvýše n. Začínáme na políčku s číslem 1, po $n-1$ krocích se dostaneme nejvýše na číslo $1+(n-1)n$. To je ovšem spor, protože bychom měli skončit na políčku s číslem n^2 a pro $n > 1$ platí $n^2 > 1+(n-1)n$. Mezi některou dvojicí políček na naší cestě je proto rozdíl aspoň $n+1$ a tvrzení je dokázáno.

(b) Nejprve ukažme, že nám stačí 8 kostiček. Můžeme je naskládat jako na obrázku vlevo, tam už se určitě žádná další kostička nevejde.

Ještě potřebujeme ukázat, že 7 či méně kostiček nestačí. Uvážíme čtverce 4×4 v rozích velkého čtverce jako na obrázku vpravo. Tyto čtverce jsou daleko od sebe, takže každá kostička zasahuje nejvýše do jednoho z nich. Předpokládejme, že je v mřížce umístěno 7 či méně kostiček. Potom musí z Dirichletova principu existovat čtverec, do kterého zasahuje nejvýše jedna z nich. Pokud tam nezasahuje žádná, můžeme triviálně jednu přidat.

Dále předpokládejme, že do daného čtverce 4×4 zasahuje právě jedna kostička a ukažme, že tam můžeme přidat ještě jednu. To je nejjednodušeji vidět tak, že si onu kostičku, která do čtverce 4×4 zasahuje, zvětšíme na čtverec 3×3. Je zjevné, že ať čtverec 3×3 umístíme přes čtverec 4×4 jakkoli, můžeme přidat další kostičku.

Tím jsme ukázali, že méně než 8 kostiček nestačí a naše konstrukce je optimální.

Poznámky:

Většina správných řešení postupovala v obou úlohách přibližně stejně jako to vzorové. V první úloze několik řešení správně poznamenalo, že pro $n = 1$ úloha nefunguje. V druhé úloze byla nejčastější špatná odpověď 10 kostiček. *(Josef Minařík)*

Úloha 4.

(a) *Ve čtverci $ABCD$ s délkou strany 2 leží na stranách AB a CD po řadě body E a F. Označme X průsečík přímek AF a DE a Y průsečík přímek BF a CE. Dokažte, že délka úsečky XY je vždy alespoň 1, ať už jsou body E, F zvolené jakkoli.* *(Josef Minařík)*

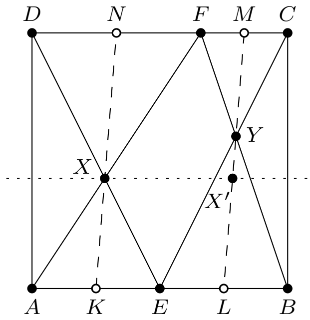
(b) *Řekneme, že konečná množina bodů v rovině je* pospolitá*, pokud pro každé tři její body existuje jednotkový kruh, který tyto body obsahuje. Dokažte, že každou pospolitou množinu lze pokrýt jednotkovým kruhem.* *(Martin Raška)*

Řešení:

(a) Označme postupně K, L, M, N středy stran AE, EB, CF, FD. Bod X je průsečíkem úhlopříček lichoběžníku $AEFD$. Protože stejnolehlost se středem X převádí úsečku AE na úsečku FD, převádí na sebe i jejich středy, takže body K, X a N leží na jedné přímce. Obdobně i bod Y leží na přímce LM. Protože $|KL| = |MN| = 1$, je $KLMN$ rovnoběžník a XY nějaká jeho příčka.

Předpokládejme nejprve, že bod F leží přímo nad E. Pak je $KLMN$ obdélník, X a Y leží ve středu jeho stran, X je díky tomu stejně vysoko jako Y a $|XY| = 1$.

V opačném případě hýbeme bodem F po úsečce CD z pozice přímo nad bodem E do jeho skutečné pozice – bez újmy na obecnosti předpokládáme, že se pohybuje směrem doprava. Na začátku jsou body X a Y stejně vysoko, bod X se hýbe doprava dolů a bod Y se hýbe doprava nahoru. To znamená, že bod Y leží výše než X. Označme X' průsečík LM s rovnoběžkou k přímce AB procházející X. Pak má trojúhelník $XX'Y$ tupý úhel u vrcholu X', a tedy $|XY| > |XX'| = 1$.



(b) V řešení předpokládáme, že M je alespoň tříbodová, omlouváme se, tato podmínka měla být součástí zadání.

Řešení nalezením nejmenšího pokrývacího kruhu:
Ukážeme, že existuje kruh K, který obsahuje všechny body naší pospolité množiny M a který zároveň má ze všech takových kruhů nejmenší poloměr. Uvažujme množinu $\mathcal{K}$ všech pokrývajících kruhů, na jejichž hranici jsou buď alespoň tři body z M, nebo dva body z M přímo naproti sobě na tomto kruhu. Takovýchto kruhů je jen konečně mnoho, takže mezi nimi musí existovat ten s nejmenším poloměrem, označme ho K.

Uvažujme libovolný jiný pokrývající kruh L a předpokládejme, že pro jejich poloměry platí $r_L < r_K$. Pokud by na hranici L nebyl žádný bod z M, lze L nahradit menším pokrývajícím kruhem se stejným středem obsahujícím alespoň jeden bod z M na hranici. Tedy můžeme předpokládat, že na hranici L leží alespoň jeden bod m z M. Pokud by byl jen jeden, lze L zmenšovat stejnolehlostí se středem v m až do té doby, než dosáhneme jiného bodu z M na hranici. Tedy můžeme předpokládat, že na hranici L leží alespoň dva body $m, n \in M$. Pokud jsou jen dva a ne naproti sobě, pak lze posouvat střed L po ose úsečky mn až do té doby, než buď dosáhne střed L středu úsečky mn, nebo dosáhneme stavu, kdy na hranici L bude alespoň jeden další bod z M. Všimněme si, že dokud střed L nepřekročí úsečku mn, poloměr se bude jen zmenšovat. Tedy můžeme předpokládat, že $L \in \mathcal{K}$, pak ale z definice K nemůže platit $r_L < r_K$, což znamená, že K je skutečně nejmenší pokrývací kruh.

Předpokládejme, že existuje půlkružnice na hranici K taková, že na ní není žádný bod z M. Pak lze střed K trochu posunout směrem k opačné půlkružnici a trochu zmenšit poloměr, čímž nalezneme pokrývací kruh s menším poloměrem. To je spor s minimalitou poloměru K, takže můžeme předpokládat, že střed K leží uvnitř konvexního mnohoúhelníku $\mathcal{M}$ s vrcholy v bodech z množiny M na hranici K. Mnohoúhelník $\mathcal{M}$ může být i jen průměr K, v tom případě přidáme libovolný další bod z M: libovolný kruh pokrývající tyto tři body pak má poloměr alespoň r_K, takže z podmínky v zadání $r_K \leq 1$.

Pokud je $\mathcal{M}$ nedegenerovaný mnohoúhelník, uvážíme libovolnou jeho triangulaci. Potom střed K leží v nějakém trojúhelníku $m_1m_2m_3$ z vrcholů $\mathcal{M}$ (nebo na jeho hranici). Tento trojúhelník tedy obsahuje střed své kružnice opsané, takže musí být ostroúhlý nebo pravoúhlý. Použitím argumentu z předchozího odstavce pro $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ dostaneme, že K je i nejmenší kruh pokrývající m_1, m_2, m_3. To už znamená, že $r_K \leq 1$.

Celkem tedy víme, že kruh K má vždy poloměr menší nebo roven 1, a tedy pokud jej nafoukneme na poloměr přesně 1, získáme hledaný kruh.

Řešení indukcí:
Pro tříbodovou množinu M úloha triviálně platí. Předpokládejme tedy, že $n = |M| \geq 4$ a že úloha platí pro libovolnou pospolitou $(n-1)$-prvkovou množinu. Nechť $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$.

Z indukčního předpokladu dostáváme existenci pokrývacích jednotkových kruhů, tedy bodů S_1, S_2, S_3, S_4 takových, že pro všechna $1 \leq i \leq 4$ a pro všechna $1 \leq j \leq n$ platí $|S_i m_j| \leq 1$, pokud $i \neq j$. Uvažme dva případy vzájemné polohy bodů S_1, S_2, S_3, S_4.

Předpokládejme, že existuje bod, třeba S_1, který leží uvnitř nebo na hranici trojúhelníku $S_2S_3S_4$. Zvolme $S = S_1$. Pak z definice S_1 máme $|Sm_j| \leq 1$ pro všechna j kromě 1. Zároveň z definice každý z bodů S_2, S_3, S_4 leží uvnitř nebo na hranici jednotkového kruhu se středem v m_1. Díky vzájemné poloze totéž platí pro S, takže S může být středem jednotkového pokrývacího kruhu pro M.

V opačném případě jsou S_1, S_2, S_3, S_4 vrcholy konvexního čtyřúhelníku, BÚNO v tomto pořadí. Zvolme S jako průsečík úseček S_1S_3 a S_2S_4. Pak pro $j \neq 1, 3$ leží úsečka S_1S_3 celá uvnitř nebo na hranici jednotkového kruhu se středem v m_j. Podobně pro $j \neq 2, 4$ a úsečku S_2S_4. Z toho už plyne, že opět lze vzít S jako střed jednotkového pokrývacího kruhu pro M.

Poznámky:

Bohužel nepřišlo mnoho správných řešení. Většina řešení **(a)** byla analytická, naopak v **(b)** už se našlo pár řešení, která se podobala prvnímu vzorovému. V **(a)** jsem dávala alespoň 1 bod, pokud řešitel vyřešil případ, kdy E leží nad F.

První vzorové řešení **(b)** v podobě, v níž je sepsané, věnuje většinu času důkazu intuitivně zřejmého tvrzení, že existuje nejmenší pokrývací kruh. Toto tvrzení formálně vůbec není jasné, jelikož obecná podmnožina reálných čísel nemusí mít minimum. Je zde skutečně velmi snadné se chytit do pasti a sepsat formálně špatný důkaz, za což jsem ale body nestrhávala. Vzorové řešeni je naopak psané tak, aby každý krok byl formálně jasný, což jej činí o něco delší.

Druhé vzorové řešení **(b)** čerpá z důkazu rovinné verze tzv. *Hellyho věty.*

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 5.

(a) *Sedm orgů se střídá v hlídání trezoru se vzorovým řešením myš-maše. Každý org má sedmihodinovou směnu, která začíná každý den ve stejnou dobu v celou hodinu a během níž trezor hlídá. Směny jsou rozvrženy tak, aby trezor v každém okamžiku hlídal aspoň jeden org. Rozhodněte, zda v každém takovém rozvržení směn existuje org, kterého můžeme propustit a přitom zachovat, že i potom bude trezor hlídán 24 hodin denně.* *(Josef Minařík)*

(b) *Máme n červených a n modrých karet, na každé z nichž je nějaké číslo od 1 do n (čísla se mohou opakovat). Je vždy možné vybrat několik modrých a několik červených karet tak, aby měly modrá a červená skupinka stejný součet?* *(Josef Minařík)*

Řešení:

(a) Nejprve dokažme, že pokud existuje hodina, kdy trezor hlídají tři orgové naráz, pak jednoho z nich můžeme propustit. Seřaďme si dané tři orgy podle času, kdy jim začíná směna. Druhý org v tomto pořadí musí začínat nejdříve tak jako první org a končit nejpozději tak jako třetí org. Protože se ale směny prvního a třetího orga překrývají, tak druhý org je zbytečný a můžeme ho propustit. Stačí tedy dokázat, že taková hodina existuje.

Odpracovaných orgo-hodin je dohromady $7 \cdot 7 = 49$. Jenže pokud by každou hodinu hlídali nejvýše dva orgové naráz, tak odpracují dohromady maximálně $2 \cdot 24 = 48 < 49$ hodin. Tedy nutně existuje hodina, kdy hlídají alespoň tři orgové naráz, a jednoho můžeme vždy propustit.

(b) Označme hodnoty modrých a červených karet postupně $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Dále zaveďme posloupnosti částečných součtů $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$ takové, že

$$x_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i \qquad \text{a} \qquad y_i = r_1 + r_2 + \cdots + r_i.$$

BÚNO nechť $x_n \leq y_n$. Pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ označme $f(i)$ nejmenší index takový, že $x_i \leq y_{f(i)}$. Nyní se podívejme na posloupnost rozdílů

$$y_{f(1)} - x_1, \quad y_{f(2)} - x_2, \quad \ldots, \quad y_{f(n)} - x_n.$$

Z definice pak každý takovýto rozdíl náleží množině $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ (kdyby byl rozdíl alespoň n, pak by $f(i)$ nebylo minimální s vlastností $x_i \leq y_{f(i)}$). Pokud pro nějaké i platí $y_{f(i)} - x_i = 0$, tak jsme vyhráli, protože prvních i modrých karet má stejný součet jako prvních $f(i)$ červených. Předpokládejme tedy, že to pro žádné i neplatí. Pak máme n rozdílů, které ale mohou nabývat pouze $n-1$ hodnot. Z Dirichletova principu se tak nějaký rozdíl nabývá alespoň dvakrát. Tedy existují i, j, $i < j$ taková, že $y_{f(i)} - x_i = y_{f(j)} - x_j$. Pak ale součet modrých karet $b_{i+1}, \ldots, b_j$ musí být stejný jako součet červených karet $r_{f(i)+1}, \ldots, r_{f(j)}$ a důkaz je hotov. Poznamenejme ještě, že jsme vlastně dokázali něco trochu silnějšího – při jakémkoliv seřazení červených a modrých karet dokážeme najít jejich souvislé úseky se stejným součtem.

Alternativní řešení:

Nechť $R_1, R_2, \ldots, R_n$ a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou po řadě červené a modré karty, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ a b_1, $b_2, \ldots, b_n$ nechť jsou po řadě čísla na nich.

Ukážeme, že pro každé i platí

$$\{i - r_i, i - r_i + b_i, i + b_i\} \cap \{1, 2, \ldots, n\} \neq \emptyset.$$

Zřejmě platí nerovnosti $i - r_i < i - r_i + b_i < i + b_i$, navíc jelikož $r_i, b_i \leq n$, nemůže se stát, aby dva sousední prvky nalevo byly jeden menší než 1, druhý větší než n. Zároveň zřejmě $1 < i + b_i$ a $n > i - r_i$, takže všechny prvky nalevo nemohou být větší než n ani menší než 1. Takže skutečně existuje prvek v průniku, jeden takový označme p_i.

Uvažujme orientovaný graf G na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že z vrcholu i vede hrana do vrcholu p_i. Z konečnosti takového grafu plyne, že pokud se vydáme na cestu z libovolného vrcholu, zacyklíme se, takže G obsahuje cyklus C. Vyberme množinu karet S tak, že pro libovolné $i \in C$ přidáme do S karty na pozici i tak, aby to odpovídalo definici p_i (např. pokud $p_i = i - r_i$, pak přidáme do S kartu R_i).

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in C} i - \sum_{i \in C} p_i \\ &= \sum_{i \in C} i - \left(\sum_{i \in C} i - \sum_{\substack{R_i \in S, \\ R_i \text{ červená}}} r_i + \sum_{\substack{B_i \in S, \\ B_i \text{ modrá}}} b_i \right), \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{R_i \in S, \\ R_i \text{ červená}}} r_i = \sum_{\substack{B_i \in S, \\ B_i \text{ modrá}}} b_i.$$

Poznámky:

Většina došlých řešení měla první podúlohu správně a postupovala podobně vzorovému řešení. Alternativně některá řešení argumentovala, že mezi nástupem prvního a třetího orga na směnu (při libovolném chronologickém očíslování) musí uběhnout alespoň 8 hodin. Nebylo ani málo řešení, která postupovala správným směrem, ale snažila se argumentovat tím, že když orgy posíláme na směny v tom „nejlepším“ rozvržení, tak stejně můžeme jednoho vždy propustit. Taková řešení pak trochu „mávala rukama“, přičemž by bylo lepší je podložit nějakými pořádnějšími argumenty. Druhou podúlohu bohužel nikdo nevyřešil. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 6.

(a) *Čísla 1 až 26 rozdělíme do dvojic (a, b), z nichž následně vyrobíme zlomky $\frac{a}{b}$. Určete, kolik nejvíce z těchto zlomků může být celočíselných.* *(Danil Koževnikov)*

(b) *Řekněme, že dvě přirozená čísla jsou si blízká, je-li jejich největší společný dělitel roven jejich rozdílu. Určete, pro která n lze zvolit n čísel takových, že každá dvě z nich jsou si blízká.* *(Radek Olšák)*

Řešení:

(a) Uvážíme prvočísla, která mezi zadanými čísly nemají žádný násobek kromě sebe sama. Jsou to čísla 17, 19, 23. Jediný způsob, jak kterékoli z těchto čísel spárovat do celočíselného zlomku, je dát je do zlomku s jedničkou ve jmenovateli. Jedničku můžeme použít právě jednou, takže nám zbudou dvě čísla, z nichž nelze sestavit celočíselný zlomek. Celočíselných zlomků tak bude nejvýše dvanáct.

Pokud dáme čísla 19 a 17 spolu do dvojice, zbylá čísla už lze spárovat do celočíselných zlomků. Páry lze najít postupně od čísel větších než 13, která musí nutně být v čitateli. Funguje třeba následující konstrukce:

$$\frac{26}{13},\quad \frac{25}{5},\quad \frac{23}{1},\quad \frac{19}{17},\quad \frac{15}{3},\quad \frac{21}{7},\quad \frac{14}{2},\quad \frac{22}{11},\quad \frac{18}{9},\quad \frac{20}{10},\quad \frac{24}{6},\quad \frac{12}{4},\quad \frac{16}{8}.$$

Při určování dvojic v tomto pořadí navíc rozebereme jen několik možností. Tímto jsme našli konstrukci, která odpovídá hornímu odhadu, největší možný počet celočíselných zlomků je tedy 12.

(b) Indukcí dokážeme, že takovou n-tici čísel lze zvolit pro všechna n. Pro $n = 1$ nelze vybrat dva různé prvky, a tvrzení tak platí triviálně. Pro $n = 2$ vyhovuje například dvojice 1, 2.

Dále provedeme indukční krok: mějme vyhovující n-tici $a_1, \ldots, a_n$. Ukážeme, že z ní umíme vytvořit vyhovující $(n+1)$-tici. Ozančme $m = \mathrm{nsn}(a_1, \ldots a_n)$ a ukažme, že m, $a_1 + m, \ldots, a_n + m$ je vyhovující $(n+1)$-tice. Vezměme libovolný prvek $a_i + m$ odvozený z původní n-tice a rozmysleme si, že si je blízký s m. Platí $\mathrm{NSD}(a_i + m, m) = \mathrm{NSD}(a_i, m) = a_i$, protože m je násobek a_i. Dále ukažme, že i čísla vzniklá z původní n-tice jsou si stále navzájem blízká. Mějme libovolná různá $a_i + m$, $a_j + m$. Protože jsou si a_i a a_j blízká, platí $a_j - a_i \mid a_i$. Navíc a_i dělí m, tudíž i $a_j - a_i$ dělí m. Výraz $a_i + m$ je tedy násobkem $a_j - a_i$, z čehož

$$\mathrm{NSD}(a_i + m, a_j + m) = \mathrm{NSD}(a_i + m, a_j - a_i) = a_j - a_i.$$

Přitom je $a_j - a_i$ rovno rozdílu čísel $a_i + m$, $a_j + m$, a ta jsou si tedy blízká.

Poznámky:

Většina řešení u části **(a)** použila to, že tři prvočísla jde spárovat pouze s jedničkou. Několik řešitelů pak ale nerozebralo všechna smysluplná párování. Zejména zapomínali, že u čísel menších než třináct je potřeba rozebrat jak to, zda mohou být ve jmenovateli, tak i zda mohou být v čitateli, nebylo-li jejich umístění vynuceno jiným číslem. Toto opomenutí pak většinou vedlo k výsledku 11, což není maximum.

V části **(b)** postupovala většina řešitelů indukcí a zpravidla použila konstrukci $(n+1)$-tice podobnou vzorovému řešení. *(Honza Nekarda)*

Úloha 7.

(a) *V čtyřúhelníku $ABCD$ je M střed AB a N střed CD. Úsečky AN, DM se protínají v K, zatímco BN, CM se protínají v L. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků AMK a CNL je stejný jako součet obsahů BML a DNK.* *(Josef Minařík)*

(b) *Kružnice α, β se protínají v bodech X a Y. Kružnice γ se dotýká kružnice α v bodě A a kružnice β v bodě B. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle XAY$ a $\sphericalangle XBY$ se protínají na úsečce XY.* *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

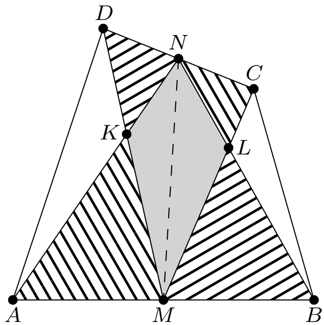
(a) Přidáním obsahu S_{MLNK} k oběma součtům $S_{AMK}+S_{CNL}$ a $S_{BML}+S_{DNK}$ chceme ekvivalentně dokázat, že

$$S_{AMCN}=S_{BMDN}.$$

Všimněme si, že MN je těžnice v obou trojúhelnících ABN, CDM, takže každý z nich dělí na dva trojúhelníky o stejném obsahu. Z toho už plyne

$$S_{AMCN}=S_{AMN}+S_{CNM}=S_{BMN}+S_{DNM}=S_{BMDN},$$

jak jsme chtěli.

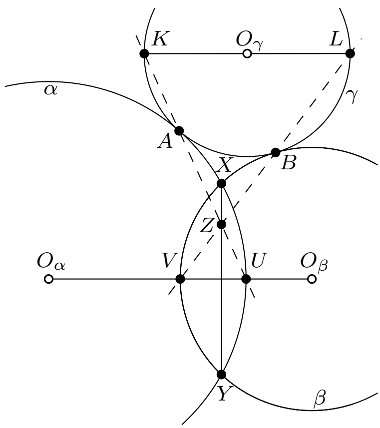


(b) Označme průsečík os úhlů $\sphericalangle XAY$, $\sphericalangle XBY$ jako Z. Dále nechť je U druhý průsečík osy $\sphericalangle XAY$ s α a V budiž druhý průsečík osy $\sphericalangle XBY$ s β. Přímka XY spojuje průsečíky α, β, takže je to *chordála*[1] těchto dvou kružnic. Aby tedy Z leželo na XY, stačí ukázat, že má stejnou mocnost k α jako k β. To znamená

$$|AZ|\cdot|ZU|=|BZ|\cdot|ZV|,$$

tedy opět mocností chceme ekvivalentně ukázat, že body A, B, U, V leží na jedné kružnici.

To už lze vyúhlit mnoha způsoby, ukažme si jeden z nich. Buďte O_α, O_β, O_γ středy α, β, γ a nechť osy úhlů $\sphericalangle XAY$, $\sphericalangle XBY$ podruhé protnou γ po řadě v bodech K, L. Z konstrukce pomocí osy úhlu je U střed oblouku XY na α, takže leží na ose XY. Podobně V leží na ose XY, jelikož se však jedná o společnou tětivu, leží na této ose i středy O_α, O_β.



[1] Chordála dvou kružnic je množina bodů, které mají k těmto kružnicím stejnou mocnost. Viz např. tento příspěvek: *https://prase.cz/library/MocnostAChordalyJT/MocnostAChordalyJT.pdf*.

Kružnice α a γ se dotýkají v bodě A, takže A je středem stejnolehlosti, která převádí α na γ. V této stejnolehlosti se U, O_α musí zobrazit na K, O_γ, což znamená $KO_\gamma \parallel UO_\alpha$. Podobně $LO_\gamma \parallel VO_\beta$, což už znamená, že K, O_γ, L leží na přímce, neboť O_α, V, U, O_β leží na přímce. Platí tedy $KL \parallel UV$.

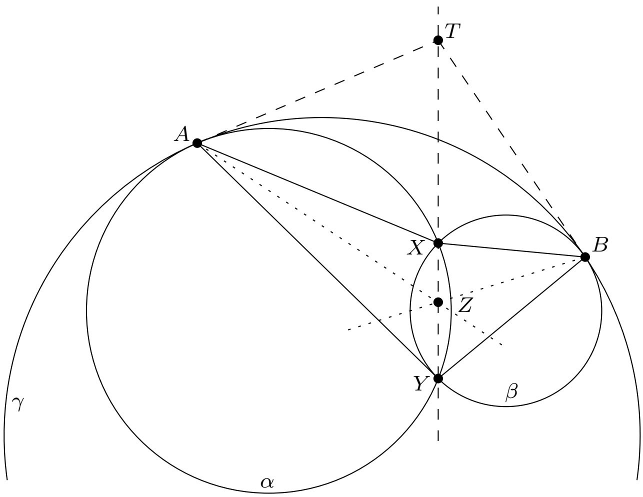
Body K, L, A, B leží na jedné kružnici, takže KL a AB jsou antirovnoběžky vzhledem k úhlu $\sphericalangle AZB$. Díky $KL \parallel UV$ jsou pak i UV a AB antirovnoběžky, takže A, B, U, V skutečně leží na jedné kružnici, jak jsme chtěli dokázat.

Řešení pomocí potenčního středu:

Tentokrát označme průsečíky přímky XY s osami úhlů $\sphericalangle XAY$, $\sphericalangle XBY$ po řadě jako Z_1, Z_2. K tomu, abychom ukázali $Z_1 = Z_2$, nyní stačí dokázat, že tyto body dělí úsečku XY ve stejném poměru, tedy že

$$\frac{|XZ_1|}{|Z_1Y|} = \frac{|XZ_2|}{|Z_2Y|}.$$

Uvažme dále přímku XY a tečny ke kružnici γ v bodech A, B. Přímka XY je stejně jako v prvním řešení chordála kružnic α, β. Tečna ke γ v bodě A je zároveň tečnou k α, takže je to chordála γ a α. Obdobně tečna v bodě B je chordálou γ a β. Tyto tři přímky se proto protínají v jednom bodě, potenčním středu kružnic α, β, γ. Označme jej T. BÚNO předpokládejme, že T leží na polopřímce YX jako na obrázku.



Upravujme poměr $\frac{|XZ_1|}{|Z_1Y|}$. Podle věty o ose vnitřního úhlu je roven poměru $\frac{|XA|}{|AY|}$. Dále máme úsekový úhel $|\sphericalangle TAX| = |\sphericalangle XYA| = |\sphericalangle TYA|$, navíc triviálně $|\sphericalangle ATX| = |\sphericalangle YTA|$, takže AXT a YAT jsou podobné trojúhelníky. To znamená

$$\frac{|XA|}{|AY|} = \frac{|TA|}{|TY|}.$$

Celkově tedy máme $\frac{|XZ_1|}{|Z_1Y|} = \frac{|TA|}{|TY|}$ a analogicky $\frac{|XZ_2|}{|Z_2Y|} = \frac{|TB|}{|TY|}$. Jenže TA a TB jsou obě tečny z bodu T ke kružnici γ, takže $|TA| = |TB|$. To už značí $\frac{|XZ_1|}{|Z_1Y|} = \frac{|XZ_2|}{|Z_2Y|}$, jak jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Všichni, kdo zaslali řešení úlohy **(a)**, jej měli správně. V úloze **(b)** většina správně odhadla, že k řešení se bude hodit mocnost. Ačkoliv zadání povoluje poměrně hodně konfigurací (třeba podle toho, zda má γ s α resp. s β vnější, nebo vnitřní dotyk), veškeré úhlení a dokazování je ve všech konfiguracích víceméně analogické, pročež jsem se rozhodl za opomenutí některých konfigurací body nestrhávat. Někteří řešitelé toto ošetřili orientovaným úhlením či pracováním s poměry jako v druhém řešení, za což je chválím. Podotkněme též, že i argumentace stejnolehlostí a (anti)rovnoběžností jako v prvním řešení řeší všechny konfigurace naráz. *(Matěj Doležálek)*