Extrémy

3. podzimní série Termín odeslání: 7. prosince 2020

Úloha 1. (3 body)
Martin chce být extrémně dobrý v kulečníku, ale trochu podvádí. Kulečníkový stůl má tvar obdélníku 2×1, na kterém se nachází šest kapes rozmístěných ve vrcholech obdélníku a ve středech jeho delších stran. Martin by dovnitř stolu chtěl umístit čtyři koule tak, aby pro každou kapsu některé dvě koule ležely s touto kapsou na přímce.[1] Kam má Martin položit svoje koule?

Úloha 2. (3 body)
Danil uspořádal turnaj v pojídání klobásek pro 55 soutěžících. Vždy když se dva z nich utkají, jeden z nich vyhraje, zatímco poražený vypadává a dál se turnaje neúčastní. Aby však soutěž byla férová, smí se dva soutěžící utkat pouze tehdy, pokud se počet výher, který má do té doby každý z nich na kontě, liší nanejvýš o jedna. I s tímto omezením se však Danilovi podařilo turnaj uspořádat tak, aby na konci měl jediného vítěze. Kolik nejvýše utkání mohl tento vítěz v průběhu turnaje vyhrát?

Úloha 3. (3 body)
Nalezněte největší přirozené číslo n, pro které je $n \cdot \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ celé číslo.[2]

Úloha 4. (5 bodů)
Na šachovnici $n \times n$ leží 111 mincí. Platí, že kdykoli se podíváme na sousední políčka, liší se počty mincí na těchto políčkách právě o 1. Určete největší n takové, že lze takto mince na šachovnici umístit.

Úloha 5. (5 bodů)
Reálná čísla x, y splňují $x^2y^2 + xy + 1 = 3y^2$. Najděte nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{y-x}{x+4y}.$$

Úloha 6. (5 bodů)
V PraSestánu leží $2n+1$ měst a mezi každými dvěma z nich vede silnice. Podél každé z těchto silnic (mimo samotná města) stojí 1, 2, nebo 3 benzinové pumpy. Pro libovolná tři města stojí podél tří silnic spojujících tato města dohromady alespoň 5 benzinek. V závislosti na n určete nejmenší možný počet benzinových pump v PraSestánu.

Úloha 7. (5 bodů)
Najděte nejmenší přirozené $k > 1$ takové, že existují nenulová racionální čísla x_1 až x_{2019}, která nejsou všechna stejná a vyhovují cyklické soustavě rovnic

$$x_n + \frac{k}{x_{n+1}} = x_{n+1} + \frac{k}{x_{n+2}}$$

pro všechna $n \in \{1, \ldots, 2019\}$, kde ztotožňujeme $x_{2020} = x_1$ a $x_{2021} = x_2$.

---

[1] Koule i kapsy považujeme za body a koule nesmějí splývat ani ležet na stranách obdélníka.
[2] Výraz $k!$ (k faktoriál) značí součin všech přirozených čísel od 1 do k včetně.

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme trojúhelník ABC, na jehož stranách AB a AC jsou dány po řadě body E a F. Na kružnici opsané $\triangle ABC$ leží bod P. Označme O_1, O_2 středy kružnic opsaných $\triangle PEB$ a $\triangle PFC$. Pro jakou pozici P na kružnici opsané je vzdálenost $|O_1O_2|$ minimální?

Extrémy

3. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

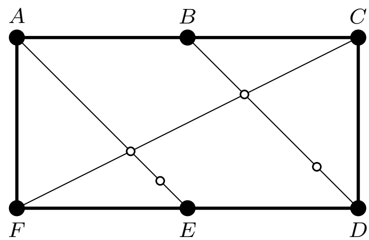
Úloha 1.

Martin chce být extrémně dobrý v kulečníku, ale trochu podvádí. Kulečníkový stůl má tvar obdélníku 2×1, na kterém se nachází šest kapes rozmístěných ve vrcholech obdélníku a ve středech jeho delších stran. Martin by dovnitř stolu chtěl umístit čtyři koule tak, aby pro každou kapsu některé dvě koule ležely s touto kapsou na přímce.[1] Kam má Martin položit svoje koule?

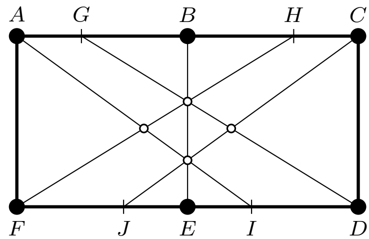
(Matěj Doležálek)

ŘEŠENÍ:
Kapsy si označíme po směru hodinových ručiček písmeny A, B, C, D, E, F, kde AC je delší strana kulečníkového stolu. Martin může koule umístit různými způsoby – popíšeme zde dvě konstrukce.

V první konstrukci dáme první kouli do průsečíku AE a CF a druhou kouli někam jinam na úsečku AE (mimo bod A a bod E). Třetí kouli pak umístíme do průsečíku BD a CF a čtvrtou někam jinak na úsečku BD (mimo body B a D).

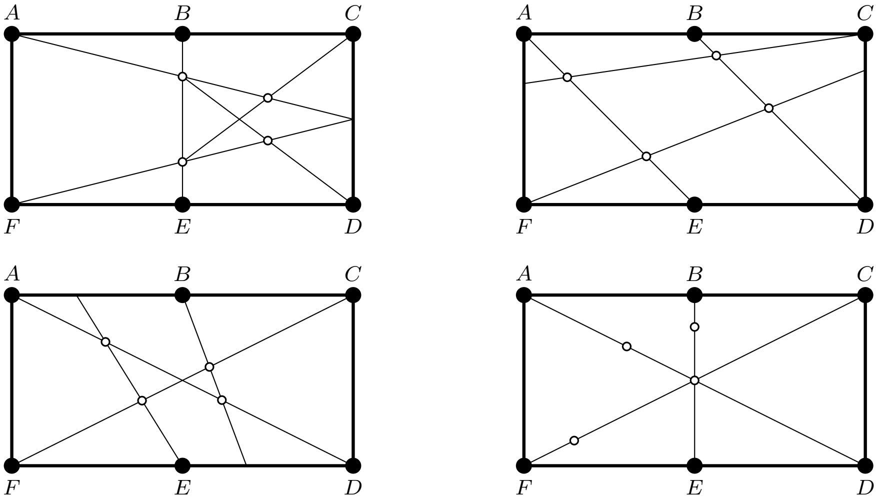


Pro druhou konstrukci si na úsečkách AB, BC, DE, EF postupně zvolíme body G, H, I, J tak, že žádný nesplývá s žádnou kapsou a platí $|GB| = |BH|$ a $|IE| = |EJ|$. Koule pak umístíme postupně do průsečíku přímek AI a CJ, CJ a DG, DG a FH, FH a AI.



[1] Koule i kapsy považujeme za body a koule nesmějí splývat ani ležet na stranách obdélníka.

Další příklady správného rozmístění koulí jsou načrtnuty na následujících obrázcích.



Poznámky:
Většina řešitelů objevila správné umístění koulí. Některá řešení obsahovala pouze obrázek bez důkladnějšího slovního vysvětlení – to není úplně správně, řešení by mělo byt srozumitelné i bez obrázku. Naopak byla řešení, která byla složena z čistě slovního popisu, což pro správnost zcela stačí, ale přidaný obrázek by ulehčil život opravovateli :-). *(Zuzana Svobodová)*

Úloha 2.

Danil uspořádal turnaj v pojídání klobásek pro 55 soutěžících. Vždy když se dva z nich utkají, jeden z nich vyhraje, zatímco poražený vypadává a dál se turnaje neúčastní. Aby však soutěž byla férová, smí se dva soutěžící utkat pouze tehdy, pokud se počet výher, který má do té doby každý z nich na kontě, liší nanejvýš o jedna. I s tímto omezením se však Danilovi podařilo turnaj uspořádat tak, aby na konci měl jediného vítěze. Kolik nejvýše utkání mohl tento vítěz v průběhu turnaje vyhrát?

(Matěj Doležálek)

Řešení:
Označme x_n nejmenší počet hráčů, pro které lze zorganizovat klobáskový turnaj s jedním vítězem, který vyhrál právě n utkání. Povšimněme si, že posloupnost x_n je nutně rostoucí. Rozmysleme si, že $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$. Na získání jedné výhry nám stačí jedno utkání dvou hráčů. Na získání dvou výher začneme utkáním dvou hráčů, a poté výherce necháme porazit ještě třetího hráče. Zároveň méně hráčů nám určitě stačit nebude. Pokud $n > 2$, do finále se musí dostat hráči, jejichž počet výher se liší nanejvýš o 1, tedy pokud chceme dosáhnout nejmenšího počtu hráčů, musíme proti sobě postavit hráče s $n-1$ a $n-2$ výhrami. Tedy platí $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Odtud můžeme spočítat postupně členy posloupnosti x_n:

$$2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89\ldots$$ [2]

Vidíme, že $x_8 = 55$ a $x_9 = 89$, tedy výherce mohl zvítězit nanejvýš v osmi utkáních. Zároveň protože x_8 je přesně rovno počtu hráčů v Danilově turnaji, zmíněný postup nám dává i konstrukci,

[2] Můžeme si povšimnout, že se jedná o známou Fibonacciho posloupnost.

jak turnaj musel probíhat: Umíme zkonstruovat hráče s jednou a dvěma výhrami, utkáním těchto dvou hráčů zkonstruujeme hráče se třemi výhrami. Odtud zase soubojem hráče se třemi a dvěma výhrami získáme konstrukci pro hráče se čtyřmi výhrami atd. Dokázali jsme tedy, že vítěz nemohl mít více než 8 výher a zároveň turnaj mohl probíhat tak, že vítěz vyhrál právě osmkrát.

Poznámky:
Valná většina došlých řešení byla správně a postupovala podobně vzorovému řešení. Častou vadou na kráse bylo nezdůvodnění toho, proč vítěz nemůže dosáhnout více výher. Daný fakt plyne přímo z konstrukce, ale je potřeba jej alespoň zmínit. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 3.

Nalezněte největší přirozené číslo n, pro které je $n \cdot \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ celé číslo.[3]
(Danil Koževnikov)

Řešení:
Výraz $n \cdot \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ upravíme do jednoho zlomku. Dostaneme tedy

$$n \cdot \frac{\frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!}}{n!} = \\ = \frac{n(n-1)\cdots 2 + n(n-1)\cdots 3 + \cdots + n(n-1) + n + 1}{(n-1)!}.$$

Aby byl výraz roven celému číslu, musí být čitatel dělitelný jmenovatelem, tedy i $n-1$. Podíváme-li se na sčítance ve jmenovateli, jistě jsou všechny až na poslední dva dělitelné $n-1$, proto musí platit i $(n-1) \mid (n+1)$, což je ekvivalentní $(n-1) \mid (n+1)-(n-1) = 2$. Největší $n-1$, pro které tato dělitelnost platí, je $n-1 = 2$, tedy $n = 3$. Skutečně máme

$$3 \cdot \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5,$$

čímž je důkaz hotov a $n = 3$.

Poznámky:
Tato úloha řešitele docela potrápila a někteří ztroskotali již na úpravě výrazu. Většina správných řešení postupovala buď v souladu se vzorovým řešením, nebo využívala dělitelnosti třemi. Sešlo se ale nemálo řešení, která se snažila argumentovat limitním chováním výrazu, růstem jmenovatele oproti čitateli nebo tím, že součet malých racionálních čísel nemůže být celé číslo. Žádné takové řešení ale nepředložilo přesvědčivý důkaz, proto zůstala bez bodu. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 4.

Na šachovnici $n \times n$ leží 111 mincí. Platí, že kdykoli se podíváme na sousední políčka, liší se počty mincí na těchto políčkách právě o 1. Určete největší n takové, že lze takto mince na šachovnici umístit.
(Danil Koževnikov)

Řešení:
Šachovnici obarvíme standardním způsobem. Všimněme si, že počty mincí na políčkách jedné barvy musí být liché a počty na políčkách druhé barvy musí být sudé. Na šachovnici $n \times n$ se nachází $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ políček jedné barvy a $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ políček druhé barvy.[4] Na jedné barvě musí ležet liché počty mincí, tyto

[3] Výraz $k!$ (k faktoriál) značí součin všech přirozených čísel od 1 do k včetně.

[4] $\lfloor x \rfloor$ a $\lceil x \rceil$ značí dolní a horní celou část reálného čísla x. Dolní celá část je největší celé číslo, které je menší nebo rovno x, horní celá část je definovaná analogicky.

liché počty pak musí být aspoň 1, takže na celé šachovnici $n \times n$ musí být rozmístěno aspoň $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ mincí. Tím dostáváme podmínku

$$\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor \leq 111,$$

což nám dává $n \leq 14$.

Teď ukážeme, že pro $n = 14$ nelze mince na šachovnici rozmístit vyhovujícím způsobem. Předpokládejme, že jsou mince na šachovnici rozmístěny vyhovujícím způsobem. Na šachovnici se nachází sudý počet bílých i černých políček, proto musí být počet políček s lichým počtem mincí sudý. Součet počtů mincí na bílých i černých políčkách je tedy sudý, takže mincí nemůže být celkem 111.

Ještě potřebujeme konstrukci pro $n = 13$. Začneme tím, že na 85 políček jedné barvy umístíme jednu minci a na zbylých 84 žádnou. Potom nám zbývá 26 mincí. Vybereme si libovolných 13 prázdných políček a na každé z nich umístíme dvě mince. Snadno nahlédneme, že takové rozmístění mincí vyhovuje.

Poznámky:
Většina řešení byla v podstatě správná, obvykle ale nebylo moc dobře odargumentováno, proč nefunguje $n = 14$. Hodnocení ale bylo mírné, takže většina řešení získala docela dost bodů.

(Josef Minařík)

Úloha 5.

Reálná čísla x, y splňují $x^2y^2 + xy + 1 = 3y^2$. Najděte nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{y-x}{x+4y}.$$

(Danil Koževnikov)

Řešení:
Upravme podmínku $x^2y^2 + xy + 1 = 3y^2$ do tvaru

$$\begin{aligned} x^2y^2 + 2xy + 1 &= 3y^2 + xy, \\ (xy+1)^2 &= y(x+3y). \end{aligned}$$

Protože druhá mocnina je nezáporná, je i $y(x+3y) \geq 0$. Obdobně pak

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 2xy + 1 &= 3y^2 - 3xy, \\ (xy-1)^2 &= 3y(y-x) \end{aligned}$$

a odtud $3y(y-x) \geq 0$. Z nerovností $y(x+3y) \geq 0$ a $3y(y-x) \geq 0$ usoudíme, že hodnoty y, $x+3y$ a $y-x$ jsou buď všechny nezáporné, nebo všechny nekladné. Všimněme si, že $y \neq 0$ (např. dosazením do podmínky ze zadání), a proto i výraz $x + 4y$ nabude nenulové hodnoty se stejným znaménkem jako y.

Podíl dvou čísel se stejným znaménkem je nezáporný, a proto

$$\frac{y-x}{x+4y} \geq 0.$$

Dále ukážeme, že výraz ze zadání je jistě menší nebo roven 4. Výrazy $x + 3y$ a $x + 4y$ mají také stejné znaménko, takže

$$\frac{5(x+3y)}{x+4y} \geq 0,$$

což upravíme na

$$4-\frac{y-x}{x+4y}\geq 0.$$

Dohromady tedy platí

$$4\geq \frac{y-x}{x+4y}\geq 0.$$

Výraz hodnot 0 a 4 nabývá např. pro dvojice $(x,y)=(1,1)$ a $(x,y)=\left(-\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, které splňují podmínku ze zadání. Proto je hledanou nejmenší hodnotou výrazu 0 a největší 4.

Alternativní řešení:
Výše jsme si všimli $y\neq 0$, takže můžeme bez obav rozšířit čitatel i jmenovatel výrazu ze zadání zlomkem $\frac{1}{y}$, a získat tak

$$\frac{y-x}{x+4y}=\frac{1-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+4}=\frac{1-a}{a+4}=-1+\frac{5}{a+4},$$

kde jsme použili substituci $a=\frac{x}{y}$.

V předchozím řešení jsme úpravou rovnice z podmínky získali nerovnosti $y(x+3y)\geq 0$ a $3y(y-x)\geq 0$. Ty můžeme vydělit kladným číslem y^2, čímž dostaneme odhady

$$\frac{x}{y}+3\geq 0 \qquad \text{a} \qquad 3-3\frac{x}{y}\geq 0,$$

celkem tedy $1\geq a\geq -3$.

Grafem $-1+\frac{5}{a+4}$ je hyperbola, která je na intervalu $\langle -3,1\rangle$ klesající. Proto stačí dosadit krajní hodnoty a, abychom získali extrémy původního výrazu ze zadání, jimiž jsou maximum 4 v bodě $a=-3$ a minimum 0 v bodě $a=1$. Snadno ověříme, že existují x a y, která vyhovují podmínce a pro která a nabývá postupně hodnot -3 a 1 (viz předchozí řešení).

Poznámky:
Řešení byla velmi různorodá, mnoho řešitelů využilo pozorování, že pokud (x,y) vyhovuje podmínce, pak jí vyhovuje i $(-x,-y)$ a pro obě tyto dvojice nabývá výraz ze zadání stejné hodnoty, k tomu, aby BÚNO předpokládali, že $y\geq 0$, čímž si usnadnili rozebírání možností. Alternativně řešitelé využili vhodné úpravy výrazu na $\frac{1-a}{a+4}$, kde $a=\frac{x}{y}$ a $y\neq 0$. *(Kateřina Panešová)*

Úloha 6.

V PraSestánu leží $2n+1$ měst a mezi každými dvěma z nich vede silnice. Podél každé z těchto silnic (mimo samotná města) stojí 1, 2, nebo 3 benzinové pumpy. Pro libovolná tři města stojí podél tří silnic spojujících tato města dohromady alespoň 5 benzinek. V závislosti na n určete nejmenší možný počet benzinových pump v PraSestánu. *(Danil Koževnikov)*

Řešení:
Ukážeme, že pro každé přirozené číslo n je nejmenší počet benzinových pump roven

$$(2n+1)2n-n=4n^2+n.$$

Úlohu vyřešíme indukcí. Pro $n=1$ máme tři města a jistě nám stačí rozestavět 1, 2 a 2 pumpy podél silnic, což dá dohromady $5=4\cdot 1^2+1$ pump. Naopak víme, že alespoň 5 pump u těchto tří měst leží, takže je tento počet minimální možný. Předpokládejme nyní, že vzorec ze začátku řešení platí pro n, a dokažme jej pro $n+1$.

To, že nám stačí $4(n+1)^2+(n+1)$ pump, ukážeme následovně. Vybereme dvě města A, B, mezi něž postavíme pouze jednu pumpu. Ke všem ostatním silnicím vedoucím z A nebo B dáme pumpy dvě. A konečně zbylých $2n+1$ měst vyplníme libovolně minimálním počtem pump, který známe z indukčního předpokladu, přičemž si představujeme, že města A, B ani silnice do nich neexistují. Pro všechny trojice měst, které neobsahují ani jedno z měst A, B, bude podmínka zřejmě splněna. Pokud trojice obsahuje obě města, tak u ní leží právě pět pump (mezi A, B jedna, u zbylých dvou silnic dvě). A konečně pokud trojice obsahuje právě jedno z měst A, B, pak u ní leží alespoň pět pump (dvě na každé cestě vedoucí z A nebo B a alespoň jedna na té poslední). Celkem jsme tímto rozestavěli

$$1+2\cdot 2(2n+1)+(4n^2+n)=(4n^2+8n+4)+(n+1)=4(n+1)^2+(n+1)$$

pump, což je přesně tolik, kolik chceme.

Stačí nám už jen ukázat, že méně pump postavit nemůžeme. Pokud by mezi každými dvěma městy byly alespoň dvě pumpy, pak by jich bylo celkově alespoň

$$2\binom{2n+3}{2}=(2n+2)(2n+3)>4(n+1)^2+(n+1).$$

V opačném případě musí existovat dvojice měst, mezi kterými stojí pouze jedna pumpa. Označme je A, B. Pro každé město C různé od A, B musí u trojice A, B, C ležet alespoň pět pump, což znamená, že na silnicích AC, BC jsou dohromady alespoň čtyři. Součtem přes všechna C zjistíme, že na silnicích obsahujících právě jedno z měst A, B musí být alespoň $4(2n+1)$ pump. Konečně mezi všemi městy kromě A, B musí být alespoň $4n^2+n$ pump z indukčního předpokladu. Tímto se dostáváme ke stejnému výpočtu jako v minulém odstavci a docházíme k tomu, že pump musí být minimálně $4(n+1)^2+(n+1)$, čímž je náš důkaz u konce.

Indukcí jsme ukázali, že minimální počet pump v PraSestánu je roven $4n^2+n$ pro každé přirozené číslo n.

Poznámky:

Většina řešitelů zvládla dokázat, že $4n^2+n$ benzínových pump stačí, za což jsem rozdával dva body. Tato část úlohy šla provést i přímo bez indukce tak, že se mezi $2n+1$ městy našlo n dvojiček, které se pospojovaly cestou s jednou pumpou, a na všechny ostatní cesty se rozmístily pumpy dvě.

Těžší částí úlohy byl důkaz, že tento počet již nejde zmenšit. Spousta řešení se pokusila i o tuto část, ale často nezvládla ošetřit všechny možnosti, jak můžou být pumpy rozmístěny. Nicméně přišlo i spoustu naprosto správných řešení, která postupovala jak podle vzorového řešení, tak i hodně jinými postupy. *Matouši Šafránkovi* jsem za přehledně sepsané řešení, které nepotřebovalo indukci ani v jedné části, udělil jeden imaginární bod. *(Filip Bialas)*

Úloha 7.

Najděte nejmenší přirozené $k>1$ takové, že existují nenulová racionální čísla x_1 až x_{2019}, která nejsou všechna stejná a vyhovují cyklické soustavě rovnic

$$x_n+\frac{k}{x_{n+1}}=x_{n+1}+\frac{k}{x_{n+2}}$$

pro všechna $n\in\{1,\dots,2019\}$, kde ztotožňujeme $x_{2020}=x_1$ a $x_{2021}=x_2$. *(Danil Koževnikov)*

Řešení:

Ukážeme, že řešením je $k=4$. Nejprve dokážeme, že žádná menší hodnota nefunguje, a poté provedeme konstrukci.

Rovnice můžeme ekvivalentně přepsat jako

$$x_n-x_{n+1}=k\left(\frac{x_{n+1}-x_{n+2}}{x_{n+1}x_{n+2}}\right).$$

Z toho je vidět, že platí $x_n \neq x_{n+1}$ pro všechna n: pokud $x_n = x_{n+1}$, tak z n-té rovnice plyne $x_{n+1} = x_{n+2}$, z té následující pak $x_{n+2} = x_{n+3}$, a tak dále. Celkem tak $x_n = x_{n+1} = \dots = x_{n-1}$, což je spor s tím, že čísla nejsou všechna stejná.

Vynásobíme-li teď všechny rovnice v upraveném tvaru, dostaneme

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\cdots(x_{2019} - x_1) = k^{2019} \cdot \frac{(x_2 - x_3)\cdots(x_{2019} - x_1)(x_1 - x_2)}{x_1^2 x_2^2 \cdots x_{2019}^2}.$$

My však již víme, že výraz $(x_1 - x_2)\cdots(x_{2019} - x_1)$, který se objevuje na obou stranách, je nenulový. Můžeme jím proto krátit, což po přenásobení jmenovatelem dá

$$(x_1 x_2 \cdots x_{2019})^2 = k^{2019}.$$

Jelikož x_n jsou všechna racionální, tak z této rovnice plyne, že $\sqrt{k^{2019}}$ je racionální číslo. Jelikož $\sqrt{k^{2019}} = k^{1009}\sqrt{k}$ a $k \in \mathbb{N}$, tak musí být i $\sqrt{k}$ racionální. To $k = 2$, 3 nesplňují, takže $k \geq 4$.

Zbývá nám najít řešení pro $k = 4$. Jelikož je 2019 dělitelné třemi, tak můžeme vzít posloupnost s periodou délky 3 (tj. $x_1 = x_{3n+1}$, $x_2 = x_{3n+2}$ a $x_3 = x_{3n}$), aby to bylo konzistentní s $x_1 = x_{2020}$, $x_2 = x_{2021}$. Můžeme se tedy zaměřit na soustavu

$$x_1 + \frac{4}{x_2} = x_2 + \frac{4}{x_3} = x_3 + \frac{4}{x_1}.$$

Snadno ověříme, že $(x_1, x_2, x_3) = (4, -2, 1)$ funguje, takže $(4, -2, 1, 4, \dots, 1)$ je řešením původní soustavy s $k = 4$ a důkaz je hotov.

Poznámky:
Téměř všechna řešení si s úlohou poradila velmi dobře. Rozhodl jsem se dávat bod za konstrukci a čtyři body za důkaz, že menší k nevyhovují (tipování řešení je totiž ještě ulehčeno podmínkou $|x_1 x_2 x_3| = 8$ z první části důkazu). Nejčastějším nedostatkem řešení bylo to, že jste občas bez důkazu předpokládali $x_n \neq x_{n+1}$, za což jsem strhával bod. Někteří řešitelé si trochu komplikovali život tím, že si rozdělili úlohu na tři případy podle délky minimální periody a pak každý z nich vyřešili v podstatě vzorovým způsobem. *(Danil Koževnikov)*

Úloha 8.

Mějme trojúhelník ABC, na jehož stranách AB a AC jsou dány po řadě body E a F. Na kružnici opsané $\triangle ABC$ leží bod P. Označme O_1, O_2 středy kružnic opsaných $\triangle PEB$ a $\triangle PFC$. Pro jakou pozici P na kružnici opsané je vzdálenost $|O_1O_2|$ minimální? *(Radek Olšák)*

Řešení:
Označme O střed kružnice opsané ABC a Q průsečík os stran EB a FC. Budeme úhlit orientovaně modulo 180°. Z tětivovosti platí $\sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle(PB, PC)$. Všimněme si též kolmostí

$$QO_1 \perp AB, \qquad QO_2 \perp AC, \qquad OO_1 \perp PB \quad \text{a} \quad OO_2 \perp PC.$$

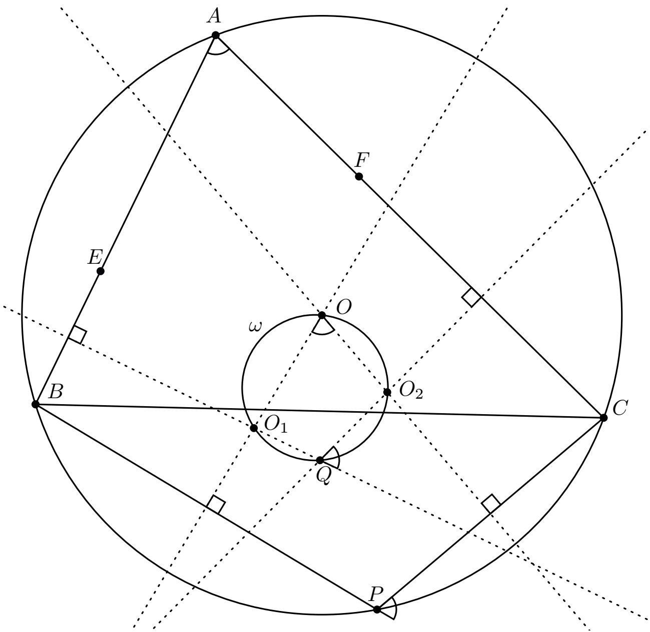
Z toho dostáváme

$$\sphericalangle(QO_1, QO_2) = \sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle(PB, PC) = \sphericalangle(OO_1, OO_2),$$

tedy čtyřúhelník OO_1O_2Q je tětivový. Označme pak ω kružnici opsanou OO_1O_2Q.

Jelikož $\sphericalangle(OO_1, OO_2) = \sphericalangle(AB, AC)$, přísluší tětivě O_1O_2 v ω pevný úhel, tedy délka této tětivy je přímo úměrná průměru ω. Tudíž bude minimální, právě když průměr této kružnice bude minimální. Protože O, Q jsou pevné body na ω, minimálním průměrem může být vzdálenost $|OQ|$.

Té dosáhneme, pokud $OO_1 \perp O_1Q$ a $OO_2 \perp O_2Q$, tedy když $PB \perp AB$ a $PC \perp AC$, což platí, je-li AP průměr kružnice opsané $\triangle ABC$. Pro tento bod je tak vzdálenost $|O_1O_2|$ minimální.



Poznámky:

Objevilo se několik různých přístupů, jak úlohu řešit – počítací pomocí sinové a kosinové věty, pomocí spirální podobnosti a řešení podobná vzorovému. Některá řešení se i snažila využívat orientované úhly, ale většina z nich neměla orientované úhlení správně, za což jsem se rozhodl body nestrhávat. Naopak za jejich správné použití jsem udělil imaginární bod. Další imaginární body jsem také udělil za alternativní stručná elegantní řešení. *(Radek Olšák)*