Hádanky

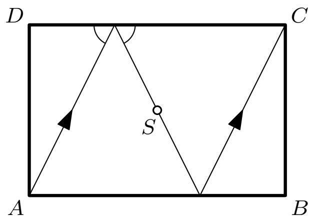
1. jarní série — Termín odeslání: 8. února 2021

Úloha 1. (3 body)
V kroužku sedí 2021 orgů. Každý buďto vždy říká pravdu, nebo vždy lže. Postupně všichni prohlásí: „Org o dvě místa nalevo ode mne říká vždy pravdu.“ Může se stát, aby alespoň jeden org mluvil pravdu a zároveň alespoň jeden lhal?

Úloha 2. (3 body)
V řadě stojí 200 mudrců. Každý z nich buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lže. Pro lichá n v pořadí n-tý mudrc prohlásil: „Právě n z nás mluví pravdu.“ Pro sudá n naopak n-tý mudrc prohlásil, že je v řadě právě n lhářů. Kolik může být mezi mudrci lhářů?

Úloha 3. (3 body)
Je dán čtverec 10×10. Je možné jej vyplnit pravoúhlými trojúhelníky s délkami stran 3, 4, 5 a čtverečky 1×1 tak, aby se žádné dva útvary nepřekrývaly a aby se žádné dva čtverečky ani nedotýkaly[1]?

Úloha 4. (5 bodů)
Strany obdélníku $ABCD$ jsou tvořeny zrcadly. Pepa z vrcholu A vystřelil laserový paprsek směrem dovnitř obdélníku. Paprsek se několikrát odrazil[2] od zrcadel, až doputoval do vrcholu C. Musel paprsek projít středem S úsečky AC?



Úloha 5. (5 bodů)
Třída o 2021 žácích si posedala do kruhu. Všichni kluci a právě tři holky vždy lžou, zatímco zbylé holky vždy mluví pravdu. Každý člen třídy prohlásil, že osoba po jeho levici a osoba po jeho pravici jsou různých pohlaví. Kolik může být ve třídě holek?

Úloha 6. (5 bodů)
Pro která přirozená n lze čísla $1, 2, 3, \ldots, 2n$ rozdělit do n dvojiček tak, že pro každou dvojičku $\{a, b\}$ je $ab + 1$ druhá mocnina nějakého přirozeného čísla?

---

[1] Čtverečky se dotýkají, pokud jejich hranice sdílí libovolný bod.
[2] Úhel dopadu paprsku je vždy stejný jako úhel odrazu.

Úloha 7. (5 bodů)

Radek má šachovnici 8×8 a na k políček umístí pěšce. Pavel ale nemá pěšce rád, proto si postupně vybere 4 sloupce a 4 řádky a odstraní z nich všechny pěšce. Pro jaké nejmenší k mohl Radek rozmístit pěšce tak, aby mu na konci nehledě na Pavlův výběr aspoň jeden zbyl?

Úloha 8. (5 bodů)

Řekněme, že přirozené číslo a je *záhadné*, pokud existují nesoudělná přirozená čísla x, y splňující $a = x^2 + y^2$. Nechť je $a_1, a_2, \dots$ nekonečná rostoucí posloupnost tvořená všemi záhadnými čísly. Je pro nějaké n všech 2021 čísel $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+2020}$ lichých?

Hádanky

1. JARNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

V kroužku sedí 2021 orgů. Každý buďto vždy říká pravdu, nebo vždy lže. Postupně všichni prohlásí: „Org o dvě místa nalevo ode mne říká vždy pravdu.“ Může se stát, aby alespoň jeden org mluvil pravdu a zároveň alespoň jeden lhal? *(Matěj Doležálek)*

ŘEŠENÍ:
Očíslujme si organizátory postupně ve směru hodinových ručiček $0, 1, \ldots, 2020$. Pokud nějaký org mluví pravdu, pak mluví pravdu i org o dvě místa nalevo od něj. Naopak pokud lže, pak musí lhát i ten, o němž hovoří. Platí tedy, že pravdomluvnost orga s číslem i je stejná jako pravdomluvnost orga s číslem $i + 2 \pmod{2021}$. Opakováním této úvahy dostáváme, že pravdomluvnost orga s číslem 0 je stejná jako pravdomluvnost orgů s čísly

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad \ldots, \quad 2020, \quad 1, \quad 3, \quad \ldots, \quad 2019, \quad 0.$$

V této posloupnosti se nejprve vyskytují všechna sudá čísla a následně všechna lichá, tedy každý org je v této posloupnosti zahrnut. Pravdomluvnost všech orgů je tak ekvivalentní, takže buď všichni mluví pravdu, nebo všichni lžou.

POZNÁMKY:
Drtivá většina řešení byla správně. Našla se hrstka lidí, kteří špatně pochopili zadání a frázi „o dvě místa nalevo“ interpretovali tak, že je zde „mezera dvou lidí“. Ve způsobu řešení úlohy to ale nehraje žádný rozdíl, a tak jsem body nestrhávala – můžeš si rozmyslet, že pro jakékoliv číslo x nesoudělné s 2021 by se varianta, kdy každý řekl „org o x míst nalevo ode mne říká vždy pravdu,“ skutečně řešila obdobně. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 2.

V řadě stojí 200 mudrců. Každý z nich buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lže. Pro lichá n v pořadí n-tý mudrc prohlásil: „Právě n z nás mluví pravdu.“ Pro sudá n naopak n-tý mudrc prohlásil, že je v řadě právě n lhářů. Kolik může být mezi mudrci lhářů? *(Matěj Doležálek)*

ŘEŠENÍ:
Všimněme si, že výroky mudrců na sudých pozicích o počtu lhářů jsou ekvivalentní výrokům o počtu pravdomluvných. Když mudrc na sudé pozici n řekne, že je v řadě právě n lhářů, znamená to, že je tam $200 - n$ pravdomluvných. Druhý mudrc tedy říká, že je v řadě 198 pravdomluvných, čtvrtý 196, … a dvoustý tvrdí, že pravdomluvný není nikdo.

Dohromady i s lichými pozicemi máme výrok, že je v řadě právě n pravdomluvných mudrců, pro každé $0 \leq n \leq 199$. Je zřejmé, že nemohou platit dva z těchto výroků současně, neboť hovoří o různých počtech pravdomluvných mudrců. Proto může existovat nejvýše jeden pravdomluvný mudrc. A skutečně, když mluví pravdu pouze první mudrc, jsou výroky všech 199 zbylých lži.

Zbývá dořešit případ, kdy není pravdomluvný žádný mudrc. To by ovšem znamenalo, že výrok dvoustého mudrce, který říká, že je právě 200 lhářů, by byl pravdivý, čímž se dostáváme ke sporu.

Jediný možný počet lhářů je tak 199.

Poznámky:
Část řešitelů volila stejný postup jako vzorové řešení. Ještě častější bylo, že jste podobným argumentem ukázali, že může být nejvýše jeden pravdomluvný na liché pozici a nejvýše jeden na sudé pozici, a pak dořešili, že případ s právě dvěma pravdomluvnými nemůže nastat, neboť by součet počtu pravdomluvných a lhářů musel být lichý.

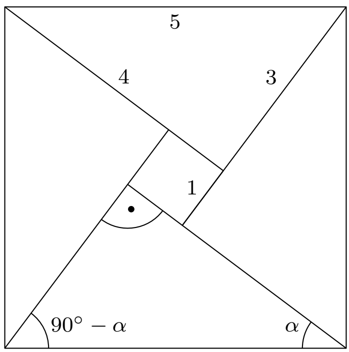
Většina řešení byla správně. Občas někdo zapomněl na možnost, že všichni mohou být lháři, za což jsem strhával jeden bod. *(Michal Töpfer)*

Úloha 3.

Je dán čtverec 10×10*. Je možné jej vyplnit pravoúhlými trojúhelníky s délkami stran* 3, 4, 5 *a čtverečky* 1×1 *tak, aby se žádné dva útvary nepřekrývaly a aby se žádné dva čtverečky ani nedotýkaly*[1]*?* *(Josef Minařík)*

Řešení:
Velký čtverec si rozdělíme na čtyři menší čtverce 5×5. Ty vydláždíme pomocí čtyř trojúhelníků a jednoho čtverce 1×1. Všechny trojúhelníky přiložíme přeponou ke straně čtverce 5×5 tak, aby sousední trojúhelníky sdílely různě dlouhé odvěsny. Nyní si rozmyslíme, že takto rozmístěné trojúhelníky se nepřekrývají. Trojúhelníky jsou pravoúhlé, protože délky jejich stran splňují Pythagorovu větu. Proto pokud k sobě trojúhelníky umístíme zmíněným způsobem, součet příslušných dvou vnitřních úhlů bude právě $90°$.

Mezera, která zůstane uvnitř, je zřejmě čtyřúhelník. Protože přilehlé trojúhelníky jsou pravoúhlé, pomocí doplňkových úhlů si všimneme, že všechny jeho vnitřní úhly jsou pravé. Jelikož se délky odvěsen liší právě o jednu jednotku, mají všechny strany délku 1, a jedná se tedy o čtverec 1×1, což je přesně dílek, který máme k dispozici. Vyplnili jsme tedy čtverec 5×5 tak, že vnitřní čtvereček je zcela obklopen trojúhelníky. Pokud použijeme čtyři takové dlaždice, pokryjeme celý čtverec 10×10 v souladu se zadáním a máme hotovo.



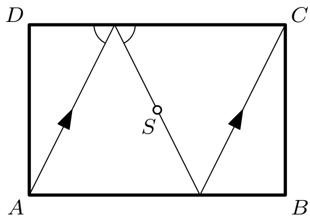
Poznámky:
Řešitelé zpravidla postupovali jedním ze dvou způsobů. Buď začali obalovat čtvereček trojúhelníky, načež ukázali, že takto získají čtverec 5×5, anebo vzali čtverec 5×5 a vyplnili jej. Rozdíl je v tom, že u druhého způsobu by se mělo ukázat, že se dílky nepřekrývají.

Jedná se o úlohu, ve které stačí najít jednu vyhovující konstrukci. Není nutné popsat, jak jste k řešení došli, nicméně měli byste zdůvodnit, že Vámi nalezené řešení opravdu splňuje to, co je zadáno. Nakonec jsem byl poměrně benevolentní, ale těm, kteří měli jen velmi stručné zdůvodnění, jsem strhl jeden bod. *(Honza Nekarda)*

[1] Čtverečky se dotýkají, pokud jejich hranice sdílí libovolný bod.

Úloha 4.

Strany obdélníku $ABCD$ jsou tvořeny zrcadly. Pepa z vrcholu A vystřelil laserový paprsek směrem dovnitř obdélníku. Paprsek se několikrát odrazil[2] *od zrcadel, až doputoval do vrcholu C. Musel paprsek projít středem S úsečky AC?*



(Jakub Löwit)

Řešení:

Vytvoříme si nekonečnou obdélníkovou síť tak, že obdélník ze zadání umístíme do počátku a každé dva obdélníky, které mají společnou hranu, jsou osově symetrické podle této hrany.

Neboli obdélník $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,1]$, $[0,1]$ je obdélník $ABCD$ ze zadání a bod $[i,j]$ je

(i) A, pokud i, j jsou sudá,
(ii) B, pokud i je liché a j je sudé,
(iii) C, pokud i i j jsou lichá,
(iv) D, pokud i je sudé a j je liché.

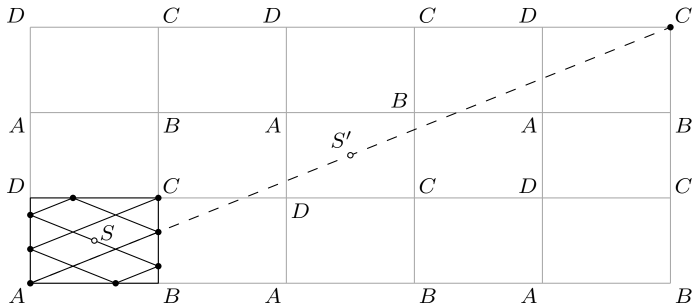
Nechť se paprsek odrazí postupně ve třech bodech X, Y, Z a bez újmy na obecnosti nechť $Y \in DC$. Zobrazíme bod Z na Z' v osové symetrii podle DC. Pak

$$|\sphericalangle DYX| = |\sphericalangle CYZ| = |\sphericalangle CYZ'|,$$

a tedy X, Y, Z' leží na přímce. Takto můžeme paprsek, který putuje v zadaném obdélníku z A do C, zobrazit v naší obdélníkové síti jako úsečku. Tato úsečka bude začínat v bodě $[0,0]$ a končit v obrazu bodu C, tedy v $[i,j]$ pro nějaké i, j liché.

Pak $S' = \left[\frac{i}{2}, \frac{j}{2}\right]$ je střed této úsečky. Protože i a j jsou lichá, tak je S' průsečík úhlopříček v obdélníku $\left[\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2}\right]$, $\left[\frac{i+1}{2}, \frac{j-1}{2}\right]$, $\left[\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2}\right]$, $\left[\frac{i-1}{2}, \frac{j+1}{2}\right]$.

Když si S' zobrazíme zpět do paprsku v zadaném obdélníku $ABCD$, tak jeho obraz S bude průsečík AC a BD, a tedy tento paprsek prochází středem AC.



[2] Úhel dopadu paprsku je vždy stejný jako úhel odrazu.

Poznámky:
Další obvyklý způsob řešení byl ukázat, že část paprsku, která vystřelila z A, je rovnoběžná s částí paprsku, která doputovala do C. Pak lze odvodit, že pro dva body na paprsku takové, že vzdálenost na trase paprsku jednoho od A je stejná jako vzdálenost na trase paprsku druhého od C, jsou tyto body středově symetrické podle středu AC. Toto platí i pro prostřední bod paprsku, a tedy to musí být právě střed AC.

Bohužel více řešitelů špatně pochopilo zadání a myslelo si, že se paprsek bude odrážet pouze od stran AB a CD. Za tato správná řešení jsem dávala 2 body. *(„madam Verča“ Hladíková)*

Úloha 5.

Třída o 2021 žácích si posedala do kruhu. Všichni kluci a právě tři holky vždy lžou, zatímco zbylé holky vždy mluví pravdu. Každý člen třídy prohlásil, že osoba po jeho levici a osoba po jeho pravici jsou různých pohlaví. Kolik může být ve třídě holek? *(Pavel Hudec)*

Řešení:
Ukážeme, že ve třídě je 1347 holek.

Víme, že kluci lžou, a tedy musí každý z nich sedět vedle osob stejného pohlaví. Rozmyslíme, že platí silnější tvrzení, tedy že každý kluk musí sedět vedle dvou holek. V opačném případě by existovala souvislá skupina alespoň dvou kluků. Ti nemohou tvořit celý kruh, jelikož jsou ve třídě alespoň tři holky, tedy existuje kluk na kraji této souvislé skupinky a ten musí sedět vedle kluka a holky, což nelze.

Teď spočítáme počet sousedících dvojic různého pohlaví (označme ho n) dvěma způsoby. Nechť x je počet pravdomluvných holek, y počet kluků a z počet holek, co lžou, sedících mezi dvěma kluky. Jelikož každý kluk sousedí se dvěma holkami, tak $n = 2y$. Zároveň každá pravdomluvná holka sousedí s jedním klukem a právě z lhářek sousedí se dvěma kluky (zbytek sousedí s dvěma holkami), tedy $n = x + 2z$. Z tohoto vyplývá, že $2y = x + 2z$.

Jelikož je ve třídě 2021 žáků a z toho právě tři lhářky, tak $x + y = 2018$, což po dosazení do předchozí rovnice dává $3y = 2018 + 2z$. Vidíme, že levá strana je dělitelná třemi, tedy

$$0 \equiv 2018 + 2z \equiv 2 + 2z \pmod 3,$$

takže $z \equiv 2 \pmod 3$. Protože ale z musí být mezi nulou a trojkou, tak je jediným řešením $z = 2$, $y = 674$ a $x = 1344$. Tedy celkově máme 1347 holek.

Povšimněme si, že s těmito počty lze žáky vhodně umístit, například způsobem

$$KHHHKHKH \quad KHH \quad KHH \quad \ldots,$$

kde K je kluk, H je holka a tři tečky jsou opakující se blok KHH.

Alternativní řešení:
Pokud lhářka sedí vedle dvou holek, tak odebráním této lhářky dostaneme menší kruh, kde se nikomu ze zbývajících dětí nezmění pohlaví sousedů. Pokud lhářka sedí vedle dvou kluků, tak jistě oba kluci mají vedle sebe holky, takže odebráním lhářky a jednoho jejího souseda se opět pohlaví sousedů u nikoho ze zbývajících dětí nezmění. Tímto způsobem můžeme odebrat tři lhářky a 0 až 3 kluky a zůstat s kruhem, kde stále platí, že každý kluk sedí vedle dvou holek a každá (pravdomluvná) holka sedí vedle kluka a holky. To znamená, že se v novém kruhu opakují trojice KHH, tedy jeho velikost je dělitelná třemi.

Jelikož jsme odebrali tři lhářky a počáteční velikost kruhu, což je ze zadání 2021, dává zbytek dva po dělení třemi, tak jsme museli odebrat právě dva kluky. Z toho plyne, že nový kruh má 2016 dětí a z toho dvě třetiny, tedy 1344, jsou holky. Tedy i s lhářkami je ve třídě 1347 holek.

Zmiňme, že tento počet je dosažitelný, jelikož můžeme proces odebírání obrátit, tedy přidat lhářky a dva kluky do kruhu o velikosti 2016, ve kterém se pouze opakuje KHH.

Poznámky:

Řešitelé se vesměs vydávali cestou druhého řešení nebo diskutováním všech možností, jak mohou lhářky sedět. V prvním případě se často stávalo, že se v řešení lhářky přidávaly do kruhu pouze s pravdomluvnými holkami. To je validní postup, ale je vhodné říci, že jde proces obrátit, tedy že nám žádná možnost neunikne. V druhém případě je důležité skutečně projít všechny možnosti. V mnoha řešeních se několik z nich opominulo, za což jsem strhával bod. Doporučuji všem, kteří takto o bod přišli, aby si dávali pozor a příště zkusili projít možnostmi v nějakém logickém pořadí, aby se to už neopakovalo. *(Pavel Turek)*

Úloha 6.

Pro která přirozená n lze čísla $1, 2, 3, \dots, 2n$ rozdělit do n dvojiček tak, že pro každou dvojičku $\{a, b\}$ je $ab + 1$ druhá mocnina nějakého přirozeného čísla? *(Pavel Hudec)*

Řešení:

Ukážeme, že vyhovují právě všechna sudá n.

Je-li $n = 2k$ sudé, můžeme čísla $1, 2, \dots, 4k$ rozdělit do k čtveřiček tvaru $(4t+1, 4t+2, 4t+3, 4t+4)$ pro $0 \le t \le k-1$ a uvnitř každé čtveřičky popárovat $4t+1$ s $4t+3$ a následně $4t+2$ s $4t+4$. Toto rozdělení vyhovuje zadání, neboť

$$(4t+1)(4t+3) + 1 = (4t+2)^2, \qquad (4t+2)(4t+4) + 1 = (4t+3)^2.$$

Zbývá tedy dokázat, že pro lichá $n = 2k+1$ čísla požadovaným způsobem rozdělit nelze. Mezi $1, 2, \dots, 4k+2$ se nachází $k+1$ čísel, která dávají zbytek 2 po dělení čtyřmi, ale pouze k násobků čtyř. Ukážeme, že $a = 4t+2$ nelze spárovat s číslem b, které není dělitelné čtyřmi:

(i) Pro $b = 4s+1$ dostáváme $ab + 1 \equiv 1 \cdot 2 + 1 \equiv 3 \pmod 4$, druhá mocnina přirozeného čísla však nemůže dávat zbytek 3 po dělení čtyřmi.

(ii) Pro $b = 4s+3$ rovněž dostáváme $ab + 1 \equiv 3 \pmod 4$, takže $ab+1$ nemůže být druhou mocninou přirozeného čísla.

(iii) Pro $b = 4s+2$ se musíme na $ab+1$ podívat modulo osm, čímž dostaneme

$$ab + 1 \equiv (4t+2)(4s+2) + 1 \equiv 16ts + 8t + 8s + 5 \equiv 5 \pmod 8.$$

Druhá mocnina přirozeného čísla ovšem nemůže dávat zbytek 5 po dělení osmi, takže $ab+1$ ani v tomto případě nemůže být druhou mocninou.

Dostáváme tedy, že $k+1$ čísel může být spárováno s pouze k čísly, což zjevně nemůže nastat. Pro lichá n tudíž čísla neumíme kýženým způsobem popárovat, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Na konstrukci pro sudá n z první části řešení přišli téměř všichni, avšak vzhledem k tomu, že se jednalo o podstatně jednodušší část úlohy, jsem se za ni rozhodl dávat pouze bod. Někteří řešitelé se pokusili argumentovat u lichých n tím, že konstrukce pro sudá n je jediná možná (což mimochodem ani není pravda: například je-li $n = 136$, můžeme místo párů $(3, 5)$ a $(133, 135)$ vzít páry $(3, 133)$ a $(5, 135)$) a s lichým n selhává, takže pro něj nemůže fungovat žádná konstrukce. V takových řešeních ovšem vždy chybělo opodstatnění tvrzení o jednoznačnosti konstrukce, které navíc ani neplatí, takže jsem je nemohl uznávat. *(Danil Koževnikov)*

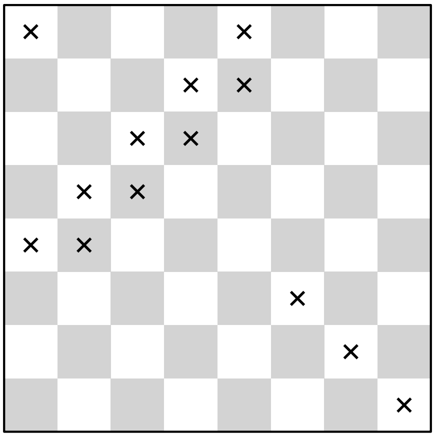
Úloha 7.

Radek má šachovnici 8×8 a na k políček umístí pěšce. Pavel ale nemá pěšce rád, proto si postupně vybere 4 sloupce a 4 řádky a odstraní z nich všechny pěšce. Pro jaké nejmenší k mohl Radek rozmístit pěšce tak, aby mu na konci nehledě na Pavlův výběr aspoň jeden zbyl? *(Radek Olšák)*

Řešení:

Nejdříve dokážeme, že méně než 13 pěšců zvládne Pavel vždy odstranit. Pavel nejprve vybere 4 řádky obsahující nejvíce pěšců. Pokud mu potom zbudou nejvýše 4 pěšci, snadno se jich zvládne zbavit. Předpokládejme, že mu zbylo aspoň 5 pěšců, potom musí být podle Dirichletova principu aspoň dva z nich v jednom řádku. Každý vybraný řádek tedy musel obsahovat aspoň 2 pěšce. To ovšem znamená, že na začátku bylo na šachovnici nejméně $5 + 4 \cdot 2 = 13$ pěšců.

Na obrázku je šachovnice s třinácti pěšci, které Pavel nedokáže odstranit. Na tři pěšce, kteří jsou vpravo dole, určitě potřebujeme aspoň tři tahy. Teď rozebereme dva případy.



Když na všechny tři pěšce vpravo dole použijeme řádek (nebo na všechny sloupec, situace je symetrická), určitě nedokážeme jedním řádkem a čtyřmi sloupci pokrýt zbytek. Ať dáme řádek kamkoliv, budou zbývat pěšci v pěti různých sloupcích.

Když na dva pěšce vpravo dole použijeme řádek a na jednoho sloupec, opět selžeme. Ať vybereme zbývající dva řádky jakkoli, vždy se zbavíme nejvýše jednoho sloupce, takže zbudou pěšci ve čtyřech různých sloupcích.

Tím jsme dokázali, že Radek potřebuje nejméně 13 pěšců.

Poznámky:

Všechna správná řešení použila konstrukci podobnou té vzorové – deset pěšců tvořících „cyklus“ a tři pěšci v různých řádcích a sloupcích. Nejtěžší částí úlohy bylo nalezení konstrukce, téměř všichni už potom zvládli dokázat, že méně pěšců nestačí. *(Josef Minařík)*

Úloha 8.

Řekněme, že přirozené číslo a je záhadné, pokud existují nesoudělná přirozená čísla x, y splňující $a = x^2 + y^2$. Nechť je $a_1, a_2, \ldots$ nekonečná rostoucí posloupnost tvořená všemi záhadnými čísly. Je pro nějaké n všech 2021 čísel $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+2020}$ lichých? *(Pavel Hudec)*

Řešení:

Ukážeme, že takové n existuje. Nechť $A = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (4041^2 - 2)$. Uvědomíme si, že platí

$$\mathrm{NSD}(A+1, 1) = \mathrm{NSD}(A+1, 3) = \mathrm{NSD}(A+1, 5) = \cdots = \mathrm{NSD}(A+1, 4041) = 1,$$

takže čísla

$$(A+1)^2 + 1^2, \quad (A+1)^2 + 3^2, \quad (A+1)^2 + 5^2, \quad \ldots, \quad (A+1)^2 + 4041^2$$

jsou všechna záhadná a lichá.

Teď nám stačí ukázat, že mezi $(A+1)^2 + 1^2$ a $(A+1)^2 + 4041^2$ není žádné sudé záhadné číslo. Takové číslo by se dalo zapsat jako $(A+1)^2 + \ell$, kde $\ell \in \{2, 4, 6, \ldots, 4041^2 - 1\}$, a zároveň jako $x^2 + y^2$ pro nesoudělná přirozená x, y.

Pokud by ℓ bylo dělitelné čtyřmi, pak by i $x^2 + y^2$ bylo dělitelné čtyřmi. Jelikož čtverce dávají zbytky 0 a 1 modulo 4, musela by být obě x, y sudá, tedy soudělná. To je však spor.

Nechť tedy ℓ dává zbytek dva po dělení čtyřmi. Pak je $\ell + 1$ tvaru $4k + 3$, takže je dělitelné nějakým prvočíslem p rovným $4m + 3$ pro nějaké nezáporné celé m. Takové p určitě existuje, neboť jinak by ℓ bylo jako součin prvočísel tvaru $4k + 1$ samo tvaru $4k + 1$. Uvědomme si, že ℓ není dělitelné čtyřmi, tedy $\ell \neq 4041^2 - 1$. Proto je A z definice dělitelné $\ell + 1$, takže je dělitelné i p. Platí tedy

$$x^2 + y^2 \equiv (A+1)^2 + \ell \equiv 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pro spor předpokládejme, že $p \nmid x$ a $p \nmid y$. Umocněním předchozí kongruence na $2m+1$ a použitím malé Fermatovy věty konečně dostaneme

$$-1 \equiv -x^{p-1} \equiv \left(-x^2\right)^{2m+1} \equiv \left(y^2\right)^{2m+1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

což je spor. Jelikož však p dělí x, právě když p dělí y, musí p dělit jak x, tak y. To znamená, že x, y jsou nutně soudělná, což nám dává spor i pro případ, kdy ℓ dává zbytek dva.[3]

Poznámky:

Když jsme tuto úlohu zadávali, očekávali jsme, že to nejspíš bude těžší osmička, ale nakonec ji nikdo správně nevyřešil. Přesto si myslím, že rozhodně neřešitelná nebyla a od některých aspirantů na místo v IMO týmu jsem čekal správná řešení.

Když je potřeba dokázat, že nějaký úsek rostoucí posloupnosti všech záhadných čísel je lichý, dává smysl uvažovat 2021 lichých záhadných čísel dost blízko sebe. Podmínka na nesoudělnost navádí (i díky jiným podobným úlohám) na použití A, kde A je „něco jako faktoriál", aby následně $A + 1$ bylo nesoudělné se vším, s čím nesoudělné být má. Pak už jen stačí vyloučit sudá čísla mezi nimi, přičemž ta dělitelná čtyřmi se vyloučí snadno. Nejtěžší krok je vyloučení čísel tvaru $4k + 2$, kde je potřeba si všimnout užitečného tvrzení o prvočíslu tvaru $4k + 3$ dělícím $x^2 + y^2$.

(Pavel Hudec)

[3] Implikace $p \mid x^2 + y^2 \implies p \mid x \wedge p \mid y$ pro prvočíslo p tvaru $4k + 3$ je známé tvrzení a není potřeba ji v řešení dokazovat. V seriálu se třeba odvozovala seriálovými metodami.