Mřížky a tabulky

3. podzimní série — Termín odeslání: 2. prosince 2019

Tabulka $n \times n$ je tvořena n^2 čtverečky.
Mřížka $n \times n$ je tvořena vrcholy a hranami čtverečků tabulky $n \times n$.

Úloha 1. (3 body)

Pepa vyplnil tabulku 3×3 čísly 1 až 9 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i na hlavních diagonálách[1] byl dělitelný devíti. Muselo pak být číslo v prostředním poli násobek tří?

Úloha 2. (3 body)

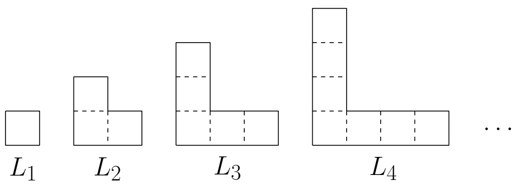
Radeček umístil do tabulky 9×9 v nějakém pořadí čísla 1 až 81. Potom Matějovi řekl, aby našel takové i, že součin čísel v i-tém řádku není roven součinu čísel v i-tém sloupci. Dokažte, že to Matěj zvládl nehledě na rozmístění čísel.

Úloha 3. (3 body)

Pavel si vyrobil krabici o rozměrech $9 \times 8 \times 8$ a chce do ní uskladnit svých 32 oblíbených kvádrů o rozměrech $2 \times 3 \times 3$ tak, aby jejich stěny byly rovnoběžné se stěnami krabice a žádný nevyčníval ven. Ukažte, že se mu to nepovede.

Úloha 4. (5 bodů)

Lenka chce vydlaždičkovat čtvercovou podlahu koupelny o rozměru $n \times n$. V místním obchodě ale prodávají pouze dlaždičky typu L_k, které mají dvě ramena tvořená k čtverečky (viz obrázek) a stojí k korun. Dlaždičky se nesmí překrývat ani lámat. Jak má Lenka nakoupit, aby zaplatila co nejméně?



Úloha 5. (5 bodů)

Ondra s Luckou našli bílou tabulku $n \times n$ a číslo k. Potom hráli následující hru: Ondra vybere k políček a obarví je červeně. Lucka pak několik červených políček (alespoň jedno) přebarví na zelenou. Pro jaké nejmenší k může vždy políčka přebarvit tak, že v každém řádku i sloupci bude sudý počet zelených políček?

[1] *Hlavní diagonála* tabulky 3×3 je tvořena dvěma protilehlými rohovými a prostředním políčkem.

Úloha 6. (5 bodů)

Martin dostal dvě posloupnosti $a_1, \ldots, a_{2020}$ a $b_1, \ldots, b_{2020}$. Každá z nich je tvořena po dvou různými reálnými čísly. Aby se naučil sčítat, vypsal si tabulku součtů, a to takovým způsobem, že do políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci napsal $a_i + b_j$. Dále zjistil, že součin čísel v každém řádku je roven 1. Ukažte, že součin čísel v každém sloupci musí být roven -1.

Úloha 7. (5 bodů)

Dominik vyplnil celou tabulku $2n \times 2n$ nepřekrývajícími se dominovými kostkami 2×1 a 1×2. Potom ji podal Terce, ať obarví vrcholy mřížky třemi barvami tak, aby dva sousední vrcholy měly stejnou barvu právě tehdy, když jejich spojnice půlí některé domino. Rozhodněte, zda ke každému rozložení domin Terka dokáže najít vyhovující obarvení.

Úloha 8. (5 bodů)

Verča dostala mřížku $n \times n$. Do ní si nakreslila cestu procházející po hranách nebo diagonálách jednotlivých čtverečků. Cesta prochází každým vrcholem právě jednou a diagonály se v ní můžou křížit. Určete maximální možný počet diagonál ve Verčině cestě.