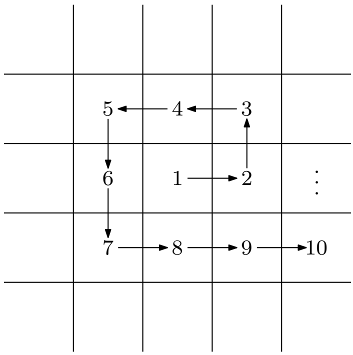
Branky, body, vteřiny

3. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. DUBNA 2020

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Housenka Hedvika spadla doprostřed čtvercové sítě. Rozhodla se, že poleze „do spirály“ tak, jak je naznačeno na obrázku. Každou vteřinu se posune o právě jedno políčko. Rozhodněte, kterým směrem poleze z 2020. na 2021. vteřinu.



ÚLOHA 2. (3 BODY)
Petr dostal za úkol postavit na šachovnici 2020×2020 několik věží tak, aby každé bílé políčko bylo obsazené nebo ohrožené. Umístit jednu věž mu trvá vteřinu. Poraďte Petrovi, jak rozestavět věže, aby splnil zadání a zároveň umístění proběhlo co nejrychleji.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Hokejového turnaje se zúčastnilo 8 týmu, hrál každý s každým a nenastaly žádné remízy. Dokažte, že můžeme vybrat čtveřici týmů A, B, C, D takovou, že tým A porazil B, C i D, tým B porazil C a D a tým C porazil D.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Lenka hraje fotbal na lichoběžníku $ABCD$, kde AB, CD jsou rovnoběžné postranní čáry a na úsečkách BC, DA jsou branky. Lenka stojí v bodě L na brankové čáře BC. Následně Ondra vykopne od rohového praporku B míč na protější branku směrem rovnoběžným s přímkou LD. Druhý Ondra vykopne od rohového praporku C míč směrem rovnoběžným s přímkou LA. Dokažte, že oba míče překročí brankovou čáru DA v témže bodě.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Polynom P stupně n s různými kořeny $a_1, \ldots, a_n$ nazveme *vteřinový*, pokud pro všechna $1 \leq i \leq n$ platí, že v bodě $a_i + 1$ má hodnotu 1. V závislosti na n najděte všechny vteřinové polynomy P.

Úloha 6. (5 bodů)

Radeček napsal na tabuli čísla $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, ..., $2m \cdot (2m+1)$. V každé z následujících $m-1$ vteřin si Anička vybrala čísla a, b, c z tabule, smazala je a místo nich napsala číslo $\frac{abc}{ab+bc+ca}$. Na konci na tabuli zůstala dvě čísla, z nichž jedno bylo $\frac{4}{3}$. Dokažte, že druhé z nich bylo větší než 4, ať už Anička vybírala jakkoliv.

Úloha 7. (5 bodů)

Žabák Pepíček skáče po kamenech očíslovaných 1, 2, 3, ..., 2^n tak, že začíná na kameni s číslem 1 a žádný kámen nenavštíví více než jednou. Každou vteřinu přitom skočí z kamene s číslem x na kámen s číslem y tak, aby $|x-y|$ byla mocnina dvojky. Tímto skokem Pepíček získá $|x-y|$ bodů. Kolik nejvíce bodů může Pepíček získat?

Úloha 8. (5 bodů)

Filip s Radem vyrazili na sjezdovku projet slalomovou trať. Trať obsahuje několik branek (ne nutně stejně širokých) rovnoběžných s vrstevnicí, které musí oba závodníci všechny projet postupně odshora dolů. Oba začínají ve stejném bodě. Když Rado projíždí brankou, zatočí tak, aby cesta do následující branky byla nejkratší možná (viz obrázek). Filip projíždí trasou optimálně. Dokažte, že Rado jel nejvýše $\sqrt{2}$-násobně delší cestou než Filip.