Posloupnosti

2. podzimní série — Termín odeslání: 4. listopadu 2019

K této sérii Ti spolu s prvními komentáři 39. ročníku přijde text, ve kterém budou vysvětleny základní pojmy a značení nutné k pochopení tohoto zadání. O něco dříve ho najdeš na našich stránkách na adrese http://mks.mff.cuni.cz/commentary.

Úloha 1. (3 body)

Hedvika napsala na tabuli slovo POSLOUPNOSTI. Poté každé písmenko nahradila číslicí od 1 do 9, přičemž stejná písmenka nahradila stejnými číslicemi a různá různými. Mohlo se stát, že po nahrazení byl rozdíl každých dvou sousedních číslic alespoň tři?

Úloha 2. (3 body)

Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$, pro kterou platí, že pokud je a_n dělitelné třemi, tak $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$. V opačném případě je $a_{n+1} = a_n - 1$. Dále víme, že a_1 je čtyřciferné číslo a $a_8 = 1$. Najděte všechna možná a_1.

Úloha 3. (3 body)

Dokažte, že pokud rostoucí aritmetická posloupnost celých čísel obsahuje druhou mocninu přirozeného čísla, obsahuje jich nekonečně mnoho.

Úloha 4. (5 bodů)

Uvažujme všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nenulových reálných čísel, ve kterých $a_1 = 1$ a které pro všechna přirozená n splňují

$$a_{n+1} + a_n = (a_{n+1} - a_n)^2.$$

Kolika různých hodnot může nabývat a_{2019}?

Úloha 5. (5 bodů)

Radeček si napsal na papír všech 2^{2019} různých posloupností plus a mínus jedniček o délce 2019. Poté v každé z nich sečetl všechny její prvky a tento součet umocnil na druhou, čímž dostal 2^{2019} výsledků. Jaký je jejich průměr?

Úloha 6. (5 bodů)

Pro která kladná reálná čísla b existuje posloupnost kladných reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_{n+2} = \sqrt{b \cdot a_{n+1} - a_n}$ pro všechna přirozená n?

Úloha 7. (5 bodů)

Jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená n je b_n rovno součinu všech různých prvočísel dělících a_n. Dále pro všechna $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dokažte, že existuje přirozené k splňující $\frac{a_k}{b_k} = 2019$.

Úloha 8. (5 bodů)

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že $a_1 = 1$ a pro všechna přirozená n větší než 1 je a_n nejmenší přirozené číslo, které je různé od všech předchozích prvků posloupnosti a které je nesoudělné s jejich součtem. Dokažte, že tato posloupnost obsahuje všechna přirozená čísla.