Přirozená čísla

2. jarní série — Termín odeslání: 2. března 2020

Úloha 1. (3 body)
Marian napsal na tabuli přirozené číslo a zeptal se svých třiceti sourozenců na jeho dělitele. Jako odpovědi dostal čísla $2, 3, \ldots, 31$. Právě dvě z těchto čísel nebyla děliteli původního čísla, a dokonce se lišila právě o 1. Určete všechny takové možné dvojice.

Úloha 2. (3 body)
Najděte nějaké přirozené číslo takové, že jeho pětinásobek je pátá mocnina přirozeného čísla, jeho šestinásobek šestá a jeho sedminásobek sedmá.

Úloha 3. (3 body)
Jsou dána přirozená čísla a, b taková, že ab i $(a+1)(b+1)$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. Dokažte, že existuje přirozené $n > 1$ takové, že $(a+n)(b+n)$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

Úloha 4. (5 bodů)
Je dána nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že pro každá dvě různá přirozená čísla i, j platí $\mathrm{NSD}(i,j) = \mathrm{NSD}(a_i, a_j)$. Dokažte, že $a_n = n$ pro každé přirozené n.

Úloha 5. (5 bodů)
Nechť $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ takové, že pro libovolná prvočísla $p, q \in \mathbb{P}$ platí

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q.$$

Úloha 6. (5 bodů)
Najděte polynom P stupně alespoň 2020 s celočíselnými koeficienty takový, že pro libovolné přirozené n jsou

$$n,\ P(n),\ P(P(n)),\ P(P(P(n))),\ \ldots$$

po dvou nesoudělná čísla.

Úloha 7. (5 bodů)
Radeček si vybral liché přirozené číslo $n > 1$ a napsal na tabuli čísla $n, \ldots, 2n-1$. Pak přišel Danil a zlomyslně mu jedno z nich smazal. Dokažte, že mohl zvolit takové, že součet zbylých čísel není dělitelný žádným z čísel, která byla původně na tabuli.

Úloha 8. (5 bodů)
Jsou dána přirozená čísla n, k taková, že pro libovolné prvočíslo p existuje celé číslo a splňující $p \mid a^k - n$. Rozhodněte, zdali nutně musí n být k-tou mocninou přirozeného čísla.